

K4: Universelle Eigenschaften

$\mathcal{C}$ lokal kleine Kategorie, $A \in \text{ob } \mathcal{C}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -): \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$$

$F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$ weiterer Funktor

1. Lemma: Jedes $a \in FA$ definiert eine natürliche Trafo

$$\alpha^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightsquigarrow F$$

mittels

$$\alpha_B^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow FB$$

$$f \mapsto (Ff)(a)$$

Beweis:

Für $\begin{array}{c} B \\ g \downarrow \\ C \end{array}$ erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{\alpha_B^a} & FB \\ \downarrow g_* & & \downarrow Fg \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) & \xrightarrow{\alpha_C^a} & FC \end{array}$$

$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\alpha_B^a} (Ff)(a)$
 $\downarrow g \circ f$
 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \xrightarrow{\alpha_C^a} (F(g \circ f))(a)$
 $(Fg)(Ff)(a)$

□

2. Notiz: Die Konstruktion lässt sich auch anwenden auf ein $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$ und liefert dann Trafo

$$\alpha^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \rightsquigarrow F$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \parallel \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, -)$$

3. Satz: Yoneda-Lemma

Für $\mathcal{C}, A, F$ wie oben wie oben definiert

$$FA \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{natürliche Trafos} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightsquigarrow F \end{array} \right\}$$

$$a \longmapsto \alpha^a$$

eine Bijektion.

Beweis:

Definiere

$$FA \longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{natürliche Trafos} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightsquigarrow F \end{array} \right\}$$

$$\alpha_A(\text{id}_A) \longleftarrow 1$$

Das definiert $\mathcal{Y}^*$ auf Morphismen.

Satz 3 liefert eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, X) & & \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Sets})}(\mathcal{Y}^*(Y), \mathcal{Y}^*(X)) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\cong} & \left\{ \begin{array}{l} \text{natürliche Trafos} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \end{array} \right\} \\ f \mapsto & & \alpha^f \end{array}$$

Hier war α^f definiert als: $\alpha^f: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$
 $g \mapsto g \circ f$
 $\parallel$
 $g \circ f$
 $\parallel$
 $f^*(g)$
 $\parallel$
 $\mathcal{Y}^*(f)(g)$ $\square$

5. Anmerkung

Korollar 4 bedeutet insbesondere

(a) Ist $\mathcal{Y}X_1 \cong \mathcal{Y}X_2$, so ist bereits $X_1 \cong X_2$.

Wir können also ein Objekt X in $\mathcal{C}$ bis auf Isomorphie dadurch festlegen, dass wir $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ (als Funktor) angeben, also auf natürliche Weise für alle $T \in \text{ob } \mathcal{C}$ alle Morphismen $T \rightarrow X$ festlegen.

(b) Ist $\mathcal{Y}^*X_1 \cong \mathcal{Y}^*X_2$, so ist bereits $X_1 \cong X_2$.

Wir können also ein Objekt X in $\mathcal{C}$ bis auf Isomorphie dadurch festlegen, dass wir $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ (als Funktor) angeben, also auf natürliche Weise für alle $T \in \text{ob } \mathcal{C}$ alle Morphismen $X \rightarrow T$ festlegen.

6. Def.: Ein Funktor

$$F: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets} \quad \text{bzw.} \quad F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$$

ist **darstellbar**, wenn er natürlich isomorph ist zu

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \quad \text{bzw.} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

für ein $A \in \text{ob } \mathcal{C}$. Eine **Darstellung** von F ist ein Paar (A, a) mit $A \in \text{ob } \mathcal{C}$ und $a \in FA$ derart, dass die natürliche Trfo

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \xrightarrow{\alpha_a} F \quad \text{bzw.} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \xrightarrow{\alpha_a} F$$

ein Isomorphismus ist. Das Element a heißt dann

universelles Element von F , und (A, a) hat die durch F definierte **Universelle Eigenschaft** ($\mathcal{U}$).

Zwei Sichtweisen:

- Wir verstehen Funktoren $F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$ besser, wenn wir eine Darstellung für sie finden.
- Wir verstehen Objekte/Konstruktionen in $\mathcal{C}$ besser, wenn wir sie durch eine $\mathcal{U}$ beschreiben können (vgl. Anmerkung 5).

7. Notiz - vgl. Anmerkung 5

Stellen (A, a) und (B, b) denselben Funktor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$ dar / haben (A, a) und (B, b) dieselbe $\mathcal{U}$, so existiert (genau) ein Isomorphismus $f: A \xrightarrow{\cong} B$ mit $(Ff)(a) = b$.

Beweis: Betrachte

$$\begin{aligned} \alpha_B^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\xrightarrow{\cong} FB \ni b \\ \alpha_A^b: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) &\xrightarrow{\cong} FA \ni a \\ \alpha_A^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} FA \end{aligned}$$

Da α_B^a Bijektion ist, $\exists! f$ mit $\alpha_B^a(f) = b$, also $(Ff)(a) = b$.

Da α_A^b Bijektion ist, $\exists! g$ mit $(Fg)(b) = a$.

Es ist

$$\alpha_A^a(g \circ f) = F(g \circ f)(a) = Fg(Ff(a)) = a$$

aber auch

$$\alpha_A^a(\text{id}_A) = a.$$

Also ist $g \circ f = \text{id}_A$.

Analog $f \circ g = \text{id}_B$. □

8. Beispiele

(a) Der vergessliche Funktor $U: \text{Groups} \rightarrow \text{Sets}$ wird dargestellt durch $(\mathbb{Z}, 1)$, denn ein Gruppenhomomorphismus $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ ist eindeutig festgelegt durch $f(1) \in G$.

$$\alpha_G^1: \text{Hom}_{\text{Groups}}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\cong} UG$$
$$f \mapsto f(1)$$

Umgekehrt hat $(\mathbb{Z}, 1)$ die durch U definierte $\mathbb{Z}$.

Ähnlich werden die folgenden vergesslichen Funktoren dargestellt:

$\text{Ab} \longrightarrow \text{Sets}$	durch	$(\mathbb{Z}, 1)$
$\text{Mod}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Sets}$	durch	$(\mathbb{R}, 1)$
$\text{Rings} \longrightarrow \text{Sets}$	durch	$(\mathbb{Z}[x], x)$
$\text{Top} \longrightarrow \text{Sets}$	durch	$(*, *)$

(6) Der kontravariante Potenzmengenfunctor

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{P}^*: \mathbf{Sets}^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Sets} \\
 \begin{array}{c} S \\ f \downarrow \\ S' \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} \mathcal{P}(S) \\ \uparrow \\ \mathcal{P}(S') \end{array} & \cong & \begin{array}{c} f^{-1}A \\ I \\ A \end{array} \\
 & & & & \hookleftarrow \mathcal{P}(\{0,1\})
 \end{array}$$

wird dargestellt durch $(\{0,1\}, \{1\})$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(S, \{0,1\}) \cong \mathcal{P}(S)$$

$$f \longmapsto f^{-1}\{1\} = \mathcal{P}(f)(\{1\})$$

Umgekehrt hat $(\{0,1\}, \{1\})$ die durch $\mathcal{P}^*$ def. $\mathbb{Z}E$.

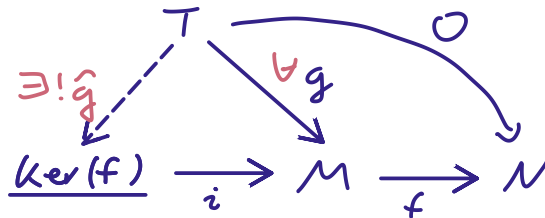
9. Beispiel: Anfangs- und Endobjekte

$$\begin{array}{c} \swarrow \text{Endobjekt in } \mathcal{C} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, 1) \cong F: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets} \\ \begin{array}{c} X \end{array} \longmapsto * \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, -) \cong F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Sets} \\ \begin{array}{c} X \end{array} \longmapsto * \\ \swarrow \text{Anfangsobjekt} \end{array}$$

10a. Beispiel

Der (kategorielle) Kern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\ker(f)}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $\underline{\ker(f)} \xrightarrow{i} M$ derart, dass $f \circ i = 0$ und die folgende $\mathcal{U}$ erfüllt ist:



Formal: Wähle $F: \text{Mod}_R^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{ccc} T & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_R(T, M) \mid f \circ g = 0\} \\ \epsilon \downarrow & & \epsilon^* \uparrow \\ T' & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_R(T', M) \mid f \circ g = 0\} \end{array}$$

Die $\mathcal{U}$ besagt:

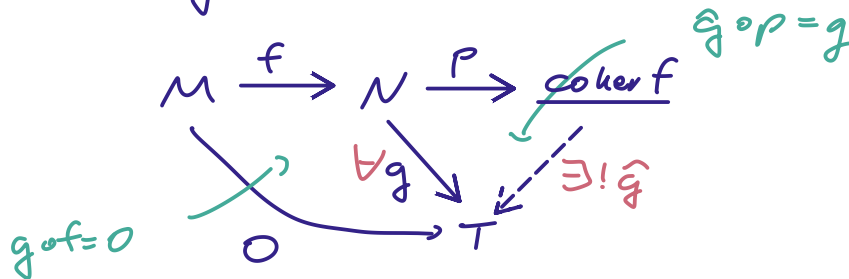
$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(-, \underline{\ker(f)}) &\cong F \\ \text{via } \text{Hom}_R(T, \underline{\ker(f)}) &\xrightarrow{\cong} FT \\ \hat{g} &\mapsto F(\hat{g})(i) = \hat{g} \circ i \end{aligned}$$

Natürlich hat $\ker f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ zusammen mit der kanonischen Inklusion $i: \ker f \longrightarrow M$ diese $\mathcal{U}$.

(Aber auch $i': \ker f \longrightarrow M$ hat diese $\mathcal{U}$.)

106. Beispiel

Der (kategorielle) Kokern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\text{coker } f$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $N \xrightarrow{p} \text{coker } f$ derart, dass $p \circ f = 0$ und die folgende $\mathcal{U}$ erfüllt ist:



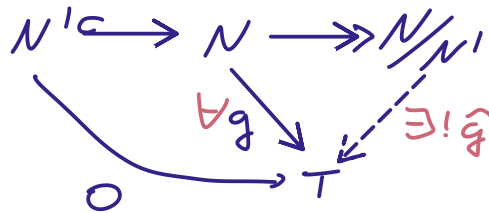
Formal: Wähle $F : \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{ccc} T & \longmapsto & \{g \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(N, T) \mid g \circ f = 0\} \\ t & \longmapsto & t_* \end{array}$$

Natürlich hat $\text{coher } f := \frac{N}{f(N)}$ zusammen mit der

Kanonschen Projektion $N \rightarrow \frac{N}{F(M)}$ diese z.f.

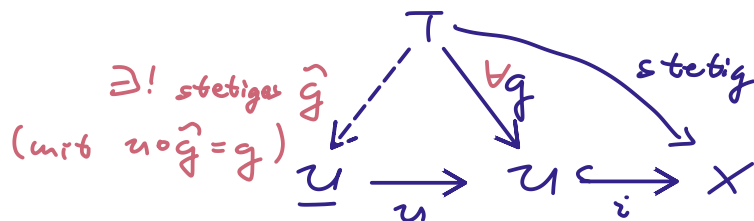
Ist f die Inklusion eines Untermoduls $N' \hookrightarrow N$ ergibt sich genau die $\subseteq$ des Quotienten N/N' aus M1, Satz 11.



11a. Beispiel X top. Raum, $U \hookrightarrow X$ Teilmenge

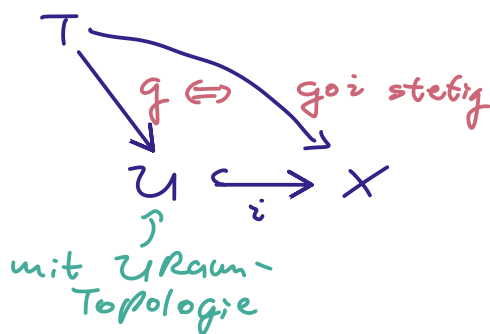
Der durch U definierte Unterraum ist ein top. Raum

$\underline{U}$ zusammen mit einer Abb. $u: \underline{U} \rightarrow U$ derart, dass $i \circ u$ stetig und folgende $\mathcal{U}$ erfüllt ist:



Wählen wir $T = *$, sehen wir: u ist Bijektion.

Um Existenz zu zeigen, wählen wir $\underline{U} = U$ mit Unterraumtopologie. Dann besagt $\mathcal{U}$:



(Formal: Wähle $F: \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{ccc} T & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(T, U) \mid i \circ g \text{ stetig} \} \\ \uparrow t & & \downarrow t^* \\ T' & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(T', U) \mid i \circ g \text{ stetig} \} \end{array}$$

Die $\mathcal{U}$ sagt: $\text{Hom}_{\text{Top}}(-, \underline{U}) \cong F$

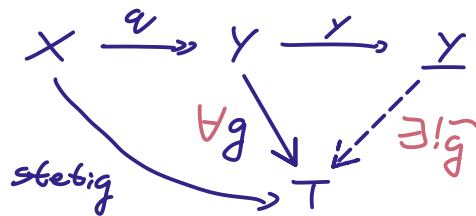
$$\begin{array}{ccc} \text{via } \text{Hom}_{\text{Top}}(T, \underline{U}) & \xrightarrow{\cong} & FT \\ g & \mapsto & (Fg)(u) = u \circ g \end{array}$$

$$T \xrightarrow{g} \underline{U} \xrightarrow{u} U$$

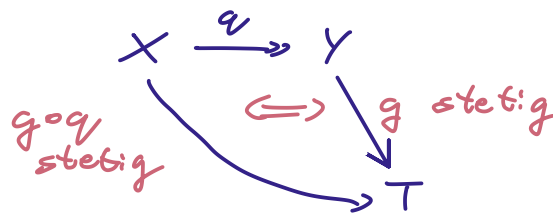
)

116. Beispiel: X top. Raum, $q: X \twoheadrightarrow Y$ Surjektion (in Sets)

Der durch q definierte Quotientenraum ist ein top. Raum $\underline{Y}$ zusammen mit einer Abb. $\gamma: Y \rightarrow \underline{Y}$ davor, dass die Komposition $\gamma \circ q$ stetig und folgende $\exists!$ erfüllt ist:



Für Existenz wähle $\underline{Y}$ mit Quotiententopologie (und $\gamma = \text{id}$). Dann sagt die $\exists!$:



(Formal: Wähle $F: \text{Top} \rightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{ccc}
 T & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(Y, T) \mid g \circ q \text{ stetig} \} \\
 \downarrow t & & \downarrow t_* \\
 T' & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(Y, T') \mid g \circ q \text{ stetig} \}
 \end{array}$$

Die $\exists!$ sagt: $\text{Hom}_{\text{Top}}(\underline{Y}, -) \cong F$
 via $\text{Hom}_{\text{Top}}(\underline{Y}, T) \xrightarrow{\cong} FT$
 $g \mapsto (Fg)(\gamma) = g \circ \gamma$)

12a. Bsp: Produkte

$\mathcal{C}$ Kategorie, X_1 und X_2 zwei Objekte. Ein **Produkt** von X_1 und X_2 ist ein Objekt $\boxed{X_1 \times X_2}$ zusammen mit Morphismen

$$X_1 \xleftarrow{\pi_1} \boxed{X_1 \times X_2} \xrightarrow{\pi_2} X_2,$$

die folgende $\mathcal{U}$ erfüllen: Für jedes Objekt T mit Morphismen

$$X_1 \xleftarrow{f_1} T \xrightarrow{f_2} X_2$$

existiert genau ein Morphismus $T \xrightarrow{\boxed{f_1, f_2}} \boxed{X_1 \times X_2}$ mit $\pi_i \circ \boxed{f_1, f_2} = f_i$ für $i=1,2$.

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & f_1 \swarrow & & \searrow f_2 & \\ X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & \boxed{X_1 \times X_2} & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \\ & & \downarrow \boxed{f_1, f_2} & & \end{array}$$

Formal: Wähle $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$

Die $\mathcal{U}$ sagt: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \boxed{X_1 \times X_2}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_2)$
 $\text{via } f \mapsto (Ff)(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$

Unterbsp.:

$\mathcal{C} = \text{Set}$: $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \times X_2$ zusammen mit

kanonischen Projektionen hat diese $\mathcal{U}$.

$$\begin{array}{ccc} T & & t \\ \downarrow \boxed{f_1, f_2} & & \downarrow \\ X_1 \times X_2 & (f_1(t), f_2(t)) & \end{array}$$

ist eine und die einzige Möglichkeit, $\boxed{f_1, f_2}$ zu definieren.

$\mathcal{C} = \text{Ab}$: $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \oplus X_2 = \langle X_1 \times X_2 \text{ mit komponentenweiser Addition} \rangle$

zusammen mit kanonischen Projektionen hat diese $\mathcal{U}$.

$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ ist genau dann Gruppenhomomorphismus, wenn f_1 und f_2 es sind.

$\mathcal{G} = \text{Groups oder Rings oder Mod}_R$ – analog

$\mathcal{G} = \text{Top}$ $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \times X_2$ mit Produkttopologie hat diese $\mathcal{U}$:
In Produkttopologie ist $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ genau dann stetig,
wenn f_1 und f_2 stetig sind.

$\mathcal{G} = \text{Potenzmenge einer Menge } S, \text{ partiell geordnet mittels } \subseteq$

Ein Produkt zweier Teilmengen $X_1, X_2 \subseteq S$ ist eine

Teilmenge $\boxed{X_1 \times X_2} \subseteq S$ zusammen mit Inklusionen

$X_1 \supseteq \boxed{X_1 \times X_2} \subseteq X_2$ die folgende $\mathcal{U}$ erfüllen:

Eine Teilmenge T ist genau dann in $\boxed{X_1 \times X_2}$ ent-
halten, wenn sie in X_1 und in X_2 enthalten ist.

$$\begin{array}{c} T \\ \forall \supseteq \exists \cap \supseteq \forall \\ X_1 \supseteq \boxed{X_1 \times X_2} \subseteq X_2 \end{array}$$

Also ist $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \cap X_2$ ein Produkt in $\mathcal{G}$.

$\mathcal{G} = (C, \leq)$ – eine Menge mit einer Halbordnung

Ein Produkt von $x_1 \in C$ und $x_2 \in C$ ist

ein Element $\boxed{x_1 \times x_2} \in C$, für das gilt:

$\boxed{x_1 \times x_2} \leq x_1$ und $\boxed{x_1 \times x_2} \leq x_2$ und

$(t \leq x_1 \text{ und } t \leq x_2 \Rightarrow t \leq \boxed{x_1 \times x_2})$.

Das ist also ein Infimum von x_1 und x_2 .

Vorheriges Bsp. ist Spezialfall.

I. A. muss so ein Infimum nicht existieren

(z.B. wenn $\leq$ triviale Halbordnung ist, in der
gar keine Elemente vergleichbar sind.)

12b. Bsp: Koprodukte

$\mathcal{C}$ Kategorie, X_1 und X_2 zwei Objekte. Ein **Koprodukt** von X_1 und X_2 ist ein Objekt $X_1 \amalg X_2$ zusammen mit Morphismen

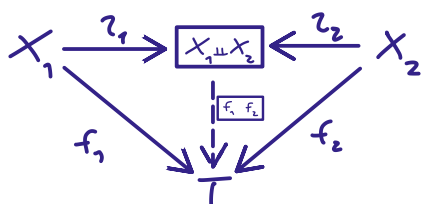
$$X_1 \xrightarrow{z_1} X_1 \amalg X_2 \xleftarrow{z_2} X_2,$$

die folgende $\mathcal{U}$ erfüllen: Für jedes Objekt T mit Morphismen

$$X_1 \xrightarrow{f_1} T \xleftarrow{f_2} X_2,$$

existiert genau ein Morphismus $X_1 \amalg X_2 \xrightarrow{[f_1, f_2]} T$ mit $[f_1, f_2] \circ z_i = f_i$

für $i=1, 2$.



Formal: Wähle $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, -) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$

Die $\mathcal{U}$ sagt: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \amalg X_2, -) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, -) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, -)$
 via $f \mapsto (Ff)(z_1, z_2) = (f \circ z_1, f \circ z_2)$

Unterbsp.:

$\mathcal{C} = \text{Set}$: $X_1 \amalg X_2$ = abstrakte disjunkte Vereinigung $X_1 \amalg X_2$
 $(\equiv \{(x, 1) \mid x \in X_1\} \cup \{(x, 2) \mid x \in X_2\})$

zusammen mit kanonischen Inklusionen

$$z_i: X_i \longrightarrow X_1 \amalg X_2 \\ x \mapsto (x, i)$$

hat die geforderte $\mathcal{U}$:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \amalg X_2 & (x, i) & \\ \downarrow [f_1, f_2] & \downarrow & \\ T & f_i(x) & \end{array}$$

ist eine und die einzige Möglichkeit, $[f_1, f_2]$ zu definieren.

$\mathcal{C} = \text{Top}$ $\boxed{X_1 \sqcup X_2} = X_1 \sqcup X_2$ mit Summentopologie hat diese $\mathcal{U}$:
 $(U \subseteq X_1 \sqcup X_2 \text{ offen} \Leftrightarrow U \cap X_1 \text{ offen und } U \cap X_2 \text{ offen})$
 In dieser Topologie ist (f_1, f_2) genau dann stetig,
 wenn f_1 und f_2 stetig sind.

$\mathcal{C} = \text{Ab}$ $\boxed{X_1 \sqcup X_2} = X_1 \oplus X_2$ (definiert wie in 5a) zusammen mit

$$\begin{array}{c}
 X_2 \longrightarrow X_1 \oplus X_2 \longleftarrow X_1 \\
 x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \longleftarrow x
 \end{array}$$

hat die geforderte $\mathcal{U}$:

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \oplus X_2 & (x_1, x_2) & (= (x_1, 0) + (0, x_2)) \\
 \downarrow \boxed{f_1, f_2} & \downarrow & \\
 T & f_1(x_1) + f_2(x_2) &
 \end{array}$$

ist eine und die einzige Möglichkeit, $\boxed{f_1, f_2}$ als
 Gruppenhomomorphismus zu definieren.

$\mathcal{C} = \text{Mod}_R$ - analog

$\mathcal{C} = \text{Groups}$ $\boxed{X_1 \sqcup X_2} = X_1 * X_2$, das freie Produkt von X_1 und X_2 ,
 zusammen mit kanonischen Inklusionen $X_i \rightarrow X_1 * X_2$
 ist ein Koproduct.

$\mathcal{C} = \text{Potenzmenge einer Menge } S, \text{ partiell geordnet mittels } \leq$

$\boxed{X_1 \sqcup X_2} = X_1 \cup X_2$, die Vereinigung der Teilmengen,
 ist ein Koproduct

$\mathcal{C} = (C, \leq)$ - eine Menge mit einer Halbordnung

Ein Koproduct von $x_1, x_2 \in C$ ist ein Supremum
 von x_1, x_2 (wenn es existiert).