K4: Universelle Eigenschaften

$\mathcal{C}$ lokal kleine Kategorie, $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-): \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets} \quad \text{weiterer Funktor}$$

1. Lemma: Jedes $a \in FA$ definiert eine natürliche Trafo

$$\alpha^a: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-) \rightsquigarrow F$$

mittels

$$\alpha^a_B: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow FB$$
$$f \longmapsto (Ff)(a)$$

Beweis:

Für $\begin{array}{c} B \\ g\downarrow \\ C \end{array}$ erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\alpha^a_B"] \arrow[d, "g_*"] & FB \arrow[d, "Fg"] & (Ff)(a) \arrow[d, mapsto] \\
g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[r, "\alpha^a_C"'] & FC & (Fg)(Ff)(a) = (F(g\circ f))(a)
\end{tikzcd}$$

$\square$

2. Notiz: Die Konstruktion lässt sich auch anwenden auf ein $F: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ und liefert dann Trafo

$$\alpha^a: \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A)}_{= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,-)} \rightsquigarrow F$$

3. Satz: Yoneda-Lemma

Für $\mathcal{C}$, A, F wie oben wie oben definiert

$$FA \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{natürliche Trafos} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-) \rightsquigarrow F \end{array} \right\}$$
$$a \longmapsto \alpha^a$$

eine Bijektion.

Beweis:

Definiere

$$FA \longleftarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{natürliche Trafos} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-) \rightsquigarrow F \end{array} \right\}$$
$$\alpha_A(\mathrm{id}_A) \longmapsfrom \alpha$$

$(\curvearrowleft = \mathrm{id})$: $\quad \alpha^a_A(\underbrace{\mathrm{id}_A}_{f}) = (F(\mathrm{id}_A))(a) = \mathrm{id}_{FA}(a) = a$

$(\curvearrowright = \mathrm{id})$: Sei $a := \alpha_A(\mathrm{id}_A)$.

Zu zeigen: $\quad \alpha^a = \alpha$

Wähle dazu beliebiges $f\colon A \longrightarrow B$ in $\mathcal{C}$ und rechne nach:

$$
\begin{aligned}
\alpha^a_B(f) &= (Ff)(a)\\
&= (Ff)(\alpha_A(\mathrm{id}_A))\\
&= \alpha_B(f_*(\mathrm{id}_A))\\
&= \alpha_B(f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\underset{\mathrm{id}_A}{\mathrm{Hom}(A,A)} \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "f_*"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\
\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & FB
\end{tikzcd}
$$

$\square$

4. Korollar: Yoneda-Einbettung „Prägarben auf $\mathcal{C}$"

Für jede lokal kleine Kategorie $\mathcal{C}$ haben wir **volltreue** Funktoren

(a) $\mathcal{Y}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Sets})$

$\qquad X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$

(b) $\mathcal{Y}^*\colon \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Sets})$

$\qquad X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$

$$
\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[d, "h"'] & \mathrm{Hom}(X, Z_1) \arrow[d, "h_*"] \\
Z_2 & \mathrm{Hom}(X, Z_2)
\end{tikzcd}
$$

Beweis:

(a) & (b) äquivalent

Zu b: Für jedes $Y \xleftarrow{f} X$ in $\mathcal{C}$ definiert f^*

natürliche Trafo $\mathcal{Y}^*(Y) \xrightarrow{f^*} \mathcal{Y}^*(X)$:

Explizit: $\quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{(f^*)_Z} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$

$\qquad g \longmapsto g \circ f$

⌈Das ist natürlich:

für $\begin{array}{c} Z_1 \\ h\downarrow \\ Z_2 \end{array}$ erhalten wir

$$
\begin{tikzcd}
g \in \mathrm{Hom}(Y, Z_1) \arrow[r, "(f^*)_{Z_1}"] \arrow[d, "h_*"'] & \mathrm{Hom}(X, Z_1) \ni g\circ f \arrow[d, "h_*"] \\
h\circ g \in \mathrm{Hom}(Y, Z_2) \arrow[r, "(f^*)_{Z_2}"'] & \mathrm{Hom}(X, Z_2) \ni h\circ g\circ f
\end{tikzcd}
$$

$h\circ g \longmapsto h\circ g\circ f$ ⌋

Das definiert $\mathcal{Y}^*$ auf Morphismen.

Satz 3 liefert eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y,X) & & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op},\mathrm{Sets})}(\mathcal{Y}^*(Y),\mathcal{Y}^*(X)) \\
\| & & \| \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \xrightarrow{\cong} & \{\text{natürliche Trafos } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)\} \\
f & \longmapsto & \alpha^f
\end{array}$$

Hier war α^f definiert als: $\alpha^f_Z : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$

$$g \longmapsto g_*(f) = g \circ f = f^*(g) = \mathcal{Y}^*(f)(g) \qquad \square$$

5. Anmerkung

Korollar 4 bedeutet insbesondere

(a) Ist $\mathcal{Y}X_1 \cong \mathcal{Y}X_2$, so ist bereits $X_1 \cong X_2$.
Wir können also ein Objekt X in $\mathcal{C}$ bis auf Isomorphie dadurch festlegen, dass wir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$ (als Funktor) angeben, also auf natürliche Weise für alle $T \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ alle Morphismen $T \longrightarrow X$ festlegen.

(b) Ist $\mathcal{Y}^*X_1 \cong \mathcal{Y}^*X_2$, so ist bereits $X_1 \cong X_2$.
Wir können also ein Objekt X in $\mathcal{C}$ bis auf Isomorphie dadurch festlegen, dass wir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$ (als Funktor) angeben, also auf natürliche Weise für alle $T \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ alle Morphismen $X \longrightarrow T$ festlegen.

6. Def.: Ein Funktor

$$F: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets} \qquad \text{bzw.} \qquad F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

ist **darstellbar**, wenn er natürlich isomorph ist zu

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

für ein $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$. Eine **Darstellung** von F ist ein Paar (A, a) mit $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ und $a \in FA$ derart, dass die natürliche Trafo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \overset{\alpha^a}{\rightsquigarrow} F \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \overset{\alpha^a}{\rightsquigarrow} F$$

ein Isomorphismus ist. Das Element a heißt dann **universelles Element** von F, und (A, a) hat **die durch F definierte Universelle Eigenschaft (UE)**.

Zwei Sichtweisen:

- Wir verstehen Funktoren $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ besser, wenn wir eine Darstellung für sie finden.
- Wir verstehen Objekte/Konstruktionen in $\mathcal{C}$ besser, wenn wir sie durch eine UE beschreiben können (vgl. Anmerkung 5).

7. Notiz – vgl. Anmerkung 5

Stellen (A, a) und (B, b) denselben Funktor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ dar / haben (A, a) und (B, b) dieselbe UE, so existiert (genau) ein Isomorphismus $f: A \xrightarrow{\cong} B$ mit $(Ff)(a) = b$.

Beweis: Betrachte

$$\alpha^a_B: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\cong} FB \ni b$$
$$\alpha^b_A: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \xrightarrow{\cong} FA \ni a$$
$$\alpha^a_A: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \xrightarrow{\cong} FA$$

Da α_B^a Bijektion ist, $\exists!\ f$ mit $\alpha_B^a(f) = b$, also $(Ff)(a) = b$.
Da α_A^b Bijektion ist, $\exists!\ g$ mit $(Fg)(b) = a$.
Es ist

$$\alpha_A^a(g \circ f) = F(g \circ f)(a) = Fg(Ff(a)) = a$$

aber auch

$$\alpha_A^a(id_A) = a.$$

Also ist $g \circ f = id_A$.
Analog $f \circ g = id_B$. $\square$

8. Beispiele

(a) Der vergessliche Funktor $\mathcal{U}: Groups \longrightarrow Sets$ wird dargestellt durch $(\mathbb{Z}, 1)$, denn ein Gruppenhomomorphismus $f: \mathbb{Z} \longrightarrow G$ ist eindeutig festgelegt durch $f(1) \in G$.

$$\alpha_G^1: \mathrm{Hom}_{Groups}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}G$$
$$f \longmapsto f(1)$$

Umgekehrt hat $(\mathbb{Z}, 1)$ die durch $\mathcal{U}$ definierte UE.

Ähnlich werden die folgenden vergesslichen Funktoren dargestellt:

$Ab \longrightarrow Sets$ durch $(\mathbb{Z}, 1)$
$Mod_R \longrightarrow Sets$ durch $(R, 1)$
$Rings \longrightarrow Sets$ durch $(\mathbb{Z}[x], x)$
$Top \longrightarrow Sets$ durch $(*, *)$

(b) Der kontravariante Potenzmengenfunktor

$$\mathcal{P}^*: \mathrm{Sets}^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

$$\begin{array}{ccccc} S & \longmapsto & \mathcal{P}(S) & \ni & f^{-1}A \\ f\downarrow & & \uparrow & & \mathrm{I} \\ S' & \longmapsto & \mathcal{P}(S') & \ni & A \end{array}$$

$\mathcal{P}(\{0,1\})$

wird dargestellt durch $(\{0,1\}, \{1\})$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(S, \{0,1\}) \cong \mathcal{P}(S)$$

$$f \longmapsto f^{-1}\{1\} = \mathcal{P}(f)(\{1\})$$

Umgekehrt hat $(\{0,1\}, \{1\})$ die durch $\mathcal{P}^*$ def. UE.

9. Beispiel: Anfangs- und Endobjekte

Endobjekt in $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, 1) \cong F: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$
$$X \longmapsto *$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\emptyset, -) \cong F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$
$$X \longmapsto *$$

Anfangsobjekt

10a. Beispiel

Der (kategorielle) Kern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\ker(f)}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $\underline{\ker(f)} \xrightarrow{i} M$ derart, dass $f \circ i = 0$ und die folgende UE erfüllt ist:

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, dashed, "\exists ! \hat{g}"'] \arrow[d, "\forall g"] \arrow[dr, bend left, "0"] & \\
\underline{\ker(f)} \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

Formal: Wähle
$$\begin{aligned}
F:\ \mathrm{Mod}_R^{op} &\longrightarrow \mathrm{Sets} \\
T &\longmapsto \{ g \in \mathrm{Hom}_R(T, M) \mid f \circ g = 0 \} \\
t \downarrow \quad & \qquad\qquad t^* \uparrow \\
T' &\longmapsto \{ g \in \mathrm{Hom}_R(T', M) \mid f \circ g = 0 \}
\end{aligned}$$

Die UE besagt:
$$\mathrm{Hom}_R(-, \underline{\ker(f)}) \cong F$$
via
$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(T, \underline{\ker(f)}) &\xrightarrow{\cong} FT \\
\hat{g} &\longmapsto F(\hat{g})(i) = \hat{g} \circ i
\end{aligned}$$

Natürlich hat $\ker f = \{ m \in M \mid f(m) = 0 \}$ zusammen mit der kanonischen Inklusion $i: \ker f \longrightarrow M,\ m \mapsto m$ diese UE.

(Aber auch $i': \ker f \longrightarrow M,\ m \mapsto -m$ hat diese UE.)

106. Beispiel

Der (kategorielle) Kokern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\operatorname{coker} f}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $N \xrightarrow[p]{} \underline{\operatorname{coker} f}$ derart, dass $p \circ f = 0$ und die folgende UE erfüllt ist:

$$\hat{g} \circ p = g$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & N \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\forall g"'] & \underline{\operatorname{coker} f} \arrow[d, dashed, "\exists ! \hat{g}"] \\
 & & T
\end{tikzcd}$$

$$g \circ f = 0$$

Formal: Wähle

$$\begin{aligned}
F : \mathrm{Mod}_R &\longrightarrow \mathrm{Sets} \\
T &\longmapsto \{ g \in \mathrm{Hom}_R(N, T) \mid g \circ f = 0 \} \\
t &\longmapsto t_*
\end{aligned}$$

Natürlich hat $\operatorname{coker} f := N/F(M)$ zusammen mit der kanonischen Projektion $N \longrightarrow N/F(M)$ diese UE.

Ist f die Inklusion eines Untermoduls $N' \xhookrightarrow{f} N$ ergibt sich genau die UE des Quotienten N/N' aus M1, Satz 11.

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, hook] \arrow[drr, bend right, "0"'] & N \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "\forall g"'] & N/N' \arrow[d, dashed, "\exists ! \hat{g}"] \\
 & & T
\end{tikzcd}$$

11a. Beispiel

X top. Raum, $U \overset{i}{\hookrightarrow} X$ Teilmenge

Der durch U definierte Unterraum ist ein top. Raum $\underline{U}$ zusammen mit einer Abb. $u: \underline{U} \longrightarrow U$ derart, dass $i \circ u$ stetig und folgende UE erfüllt ist:

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, dashed, "\exists! \text{ stetiges } \hat{g} \ (\text{mit } u \circ \hat{g} = g)"'] \arrow[d, "\forall g"] \arrow[dr, bend left, "\text{stetig}"] & \\
\underline{U} \arrow[r, "u"'] & U \arrow[r, hook, "i"'] & X
\end{tikzcd}$$

Wählen wir $T = *$, sehen wir: u ist Bijektion.

Um Existenz zu zeigen, wählen wir $\underline{U} = U$ mit Unterraumtopologie. Dann besagt UE:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, bend left, "g \circ i \text{ stetig}"] \arrow[d, phantom, shift left=6, "\Leftrightarrow"] & \\
U \arrow[r, hook, "i"'] & X
\end{tikzcd}$$

mit URaum-Topologie

(Formal: Wähle $F: \mathrm{Top}^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets}$

$$\begin{aligned}
T &\longmapsto \{ g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(T, U) \mid i \circ g \text{ stetig} \} \\
t \uparrow \quad & \qquad\qquad\qquad \downarrow t^* \\
T' &\longmapsto \{ g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(T', U) \mid i \circ g \text{ stetig} \}
\end{aligned}$$

Die UE sagt: $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(-, \underline{U}) \cong F$

via $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(T, \underline{U}) \xrightarrow{\cong} FT$

$\qquad g \longmapsto (Fg)(u) = u \circ g$

$\qquad\qquad T \xrightarrow{g} \underline{U} \xrightarrow{u} U$)

11.6. Beispiel: X top. Raum, $q: X \twoheadrightarrow Y$ Surjektion (in Sets)

Der durch q definierte Quotientenraum ist ein top. Raum $\underline{Y}$ zusammen mit einer Abb. $y: Y \longrightarrow \underline{Y}$ derart, dass die Komposition $y \circ q$ stetig und folgende UE erfüllt ist:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[drr, bend right, "\text{stetig}"'] & Y \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "\forall g"] & \underline{Y} \arrow[d, dashed, "\exists! \bar{g}"] \\ & & T \end{tikzcd}$$

Für Existenz wähle Y mit Quotiententopologie (und $y = \mathrm{id}$). Dann sagt die UE:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dr, bend right, "g \circ q \text{ stetig}"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \Longleftrightarrow \quad g \text{ stetig}$$

(Formal: Wähle $F: \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Sets}$

$$\begin{aligned} T &\longmapsto \{ g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(Y, T) \mid g \circ q \text{ stetig} \} \\ t \downarrow \quad & \qquad\qquad t_* \downarrow \\ T' &\longmapsto \{ g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(Y, T') \mid g \circ q \text{ stetig} \} \end{aligned}$$

Die UE sagt: $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\underline{Y}, -) \cong F$

via $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\underline{Y}, T) \xrightarrow{\cong} FT$

$g \longmapsto (Fg)(y) = g \circ y$)

12a. Bsp: Produkte

$\mathcal{C}$ Kategorie, X_1 und X_2 zwei Objekte. Ein Produkt von X_1 und X_2 ist ein Objekt $\boxed{X_1\times X_2}$ zusammen mit Morphismen

$$X_1 \xleftarrow{\pi_1} \boxed{X_1\times X_2} \xrightarrow{\pi_2} X_2,$$

die folgende UE erfüllen: Für jedes Objekt T mit Morphismen

$$X_1 \xleftarrow{f_1} T \xrightarrow{f_2} X_2$$

existiert genau ein Morphismus $T \xrightarrow{\boxed{\substack{f_1\\ f_2}}} \boxed{X_1\times X_2}$ mit $\pi_i \circ \boxed{\substack{f_1\\ f_2}} = f_i$ für $i = 1,2$.

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "\boxed{\substack{f_1\\ f_2}}"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1 & \boxed{X_1\times X_2} \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & X_2,
\end{tikzcd}$$

Formal: Wähle $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X_1)\times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X_2) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Sets$

Die UE sagt: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\boxed{X_1\times X_2}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X_1)\times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X_2)$

via $\quad f \mapsto (Ff)(\pi_1,\pi_2) = (\pi_1\circ f, \pi_2 \circ f)$

Unterbsp.:

$\mathcal{C} = Set$: $\boxed{X_1\times X_2} = X_1 \times X_2$ zusammen mit kanonischen Projektionen hat diese UE.

$$\boxed{\substack{f_1\\ f_2}} := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} T & & t \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X_1\times X_2 & & (f_1(t), f_2(t)) \end{matrix}$$

ist eine und die einzige Möglichkeit, $\boxed{\substack{f_1\\ f_2}}$ zu definieren.

$\mathcal{C} = Ab$: $\boxed{X_1\times X_2} = X_1 \oplus X_2 = \lfloor X_1 \times X_2$ mit komponentenweiser Addition $\rfloor$

zusammen mit kanonischen Projektionen hat diese UE.

$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ ist genau dann Gruppenhomomorphismus, wenn f_1 und f_2 es sind.

$\mathcal{C} = \text{Groups}$ oder Rings oder Mod_R — analog

$\mathcal{C} = \text{Top}$ $\quad \boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \times X_2$ mit Produkttopologie hat diese UE:
In Produkttopologie ist $\binom{f_1}{f_2}$ genau dann stetig, wenn f_1 und f_2 stetig sind.

$\mathcal{C} =$ Potenzmenge einer Menge S, partiell geordnet mittels $\subseteq$

Ein Produkt zweier Teilmengen $X_1, X_2 \subseteq S$ ist eine Teilmenge $\boxed{X_1 \times X_2} \subseteq S$ zusammen mit Inklusionen $X_1 \supseteq \boxed{X_1 \times X_2} \subseteq X_2$ die folgende UE erfüllen:
Eine Teilmenge T ist genau dann in $\boxed{X_1 \times X_2}$ enthalten, wenn sie in X_1 und in X_2 enthalten ist.

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & \overset{\forall}{\rotatebox{-45}{$\supseteq$}} & \exists! \rotatebox{90}{$\supseteq$} & \overset{\forall}{\rotatebox{45}{$\subseteq$}} & \\ X_1 & \supseteq & \boxed{X_1 \times X_2} & \subseteq & X_2 \end{array}$$

Also ist $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \cap X_2$ ein Produkt in $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C} = (C, \leq)$ — eine Menge mit einer Halbordnung

Ein Produkt von $x_1 \in C$ und $x_2 \in C$ ist ein Element $\boxed{x_1 \times x_2} \in C$, für das gilt:
$\boxed{x_1 \times x_2} \leq x_1$ und $\boxed{x_1 \times x_2} \leq x_2$ und
$(t \leq x_1$ und $t \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad t \leq \boxed{x_1 \times x_2})$.
Das ist also ein Infimum von x_1 und x_2.

Vorheriges Bsp. ist Spezialfall.
I. A. muss so ein Infimum nicht existieren (z. B. wenn $\leq$ triviale Halbordnung ist, in der gar keine Elemente vergleichbar sind.)

126. Bsp: Koprodukte

$\mathcal{C}$ Kategorie, X_1 und X_2 zwei Objekte. Ein Koprodukt von X_1 und X_2 ist ein Objekt $\boxed{X_1 \amalg X_2}$ zusammen mit Morphismen

$$X_1 \xrightarrow{\iota_1} \boxed{X_1 \amalg X_2} \xleftarrow{\iota_2} X_2,$$

die folgende UE erfüllen: Für jedes Objekt T mit Morphismen

$$X_1 \xrightarrow{f_1} T \xleftarrow{f_2} X_2,$$

existiert genau ein Morphismus $\boxed{X_1 \amalg X_2} \xrightarrow{\boxed{f_1\ f_2}} T$ mit $\boxed{f_1\ f_2} \circ \iota_i = f_i$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & \boxed{X_1 \amalg X_2} \arrow[d, dashed, "\boxed{f_1\ f_2}"] & X_2 \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Formal: Wähle $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, -) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$

Die UE sagt: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boxed{X_1 \amalg X_2}, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, -) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, -)$

via $f \mapsto (Ff)(\iota_1, \iota_2) = (f \circ \iota_1, f \circ \iota_2)$

Unterbsp.:

$\mathcal{C} = \mathrm{Set}$: $\boxed{X_1 \amalg X_2}$ = abstrakte disjunkte Vereinigung $X_1 \amalg X_2$

$(\equiv \{(x,1) \mid x \in X_1\} \cup \{(x,2) \mid x \in X_2\})$

zusammen mit kanonischen Inklusionen

$$\iota_i : X_i \longrightarrow X_1 \amalg X_2, \quad x \mapsto (x, i)$$

hat die geforderte UE:

$$\boxed{f_1\ f_2} := (f_1\ f_2) : X_1 \amalg X_2 \longrightarrow T, \quad (x, i) \mapsto f_i(x)$$

ist eine und die einzige Möglichkeit, $\boxed{f_1\ f_2}$ zu definieren.

$\mathcal{C} = Top$ $\quad \boxed{X_1 \sqcup X_2} = X_1 \sqcup X_2$ mit Summentopologie hat diese UE:

$(U \subseteq X_1 \sqcup X_2$ offen $\Leftrightarrow U \cap X_1$ offen und $U \cap X_2$ offen$)$

In dieser Topologie ist $(f_1\ f_2)$ genau dann stetig, wenn f_1 und f_2 stetig sind.

$\mathcal{C} = Ab$ $\quad \boxed{X_1 \sqcup X_2} = X_1 \oplus X_2$ (definiert wie in 5a) zusammen mit

$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \longrightarrow & X_1 \oplus X_2 & \longleftarrow & X_1 \\ x & \mapsto & (x, 0) & & \\ & & (0, x) & \leftarrow\!\shortmid & x \end{array}$$

hat die geforderte UE:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \oplus X_2 & & (x_1, x_2) \ (= (x_1, 0) + (0, x_2)) \\ \boxed{f_1\ f_2} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ T & & f_1(x_1) + f_2(x_2) \end{array}$$

ist eine und die einzige Möglichkeit, $\boxed{f_1\ f_2}$ als Gruppenhomomorphismus zu definieren.

$\mathcal{C} = Mod_R$ – analog

$\mathcal{C} = Groups$ $\quad \boxed{X_1 \sqcup X_2} = X_1 * X_2$, das freie Produkt von X_1 und X_2, zusammen mit kanonischen Inklusionen $X_i \to X_1 * X_2$ ist ein Koprodukt.

$\mathcal{C} =$ Potenzmenge einer Menge S, partiell geordnet mittels $\subseteq$

$\boxed{X_1 \sqcup X_2} = X_1 \cup X_2$, die Vereinigung der Teilmengen, ist ein Koprodukt

$\mathcal{C} = (C, \leq)$ – eine Menge mit einer Halbordnung

Ein Koprodukt von $x_1, x_2 \in C$ ist ein Supremum von x_1, x_2 (wenn es existiert).