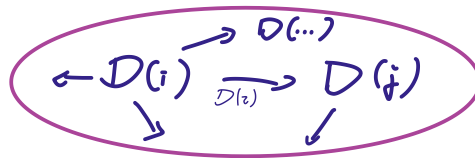


K5: Limiten und Kolimiten

1. Def.: I eine Kategorie. Ein Diagramm der Form I in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Funktor $D: I \rightarrow \mathcal{C}$.



2. Bsp.:

(a) $I = \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \rightarrow \bullet$

Diagramm der Form I in $\mathcal{C}$ ist ein Morphismus in $\mathcal{C}$

(b) $I = \begin{array}{ccc} \bullet & \rightarrow & \bullet \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \bullet & \rightarrow & \bullet \end{array}$

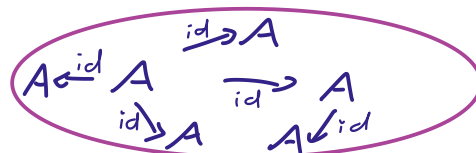
Diagramm der Form I in $\mathcal{C}$ ist ein kommutatives Quadrat in $\mathcal{C}$.

(c) $I = \begin{array}{ccc} \bullet & \rightarrow & \bullet \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \bullet & \rightarrow & \bullet \end{array}$

Diagramm der Form I in $\mathcal{C}$ ist ein (nicht notw. kommutatives) Quadrat in $\mathcal{C}$.

3. Def.: $I, \mathcal{C}$ wie oben. Für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ haben wir das konstante Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta A: I & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ i & \longmapsto & A \\ \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \\ j & \longmapsto & A \end{array}$$



4. **Notiz:** Wir haben einen Funktor:

$$\Delta: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$$

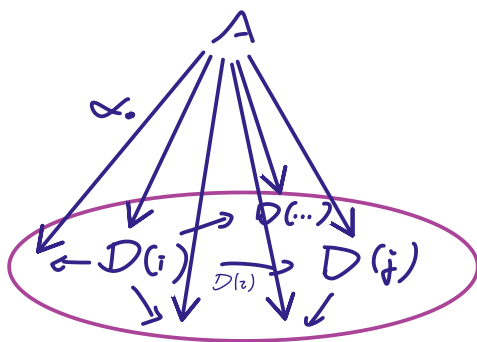
$$\begin{array}{ccc} A & \mapsto & \Delta A \\ f \downarrow & & \downarrow f_* \\ B & \mapsto & \Delta B \end{array} \quad \left(= \begin{array}{l} \text{natürliche Trafo} \\ \text{bestehend aus} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} (\Delta A)(i) = A \\ \downarrow f \\ (\Delta B)(i) = B \end{array}$$

5. **Def.:** Ein Kegel über einem Diagramm D mit Spitze A (für $A \in \text{ob } \mathcal{C}$) ist eine natürliche Trafo $\alpha: \Delta A \rightarrow D$.

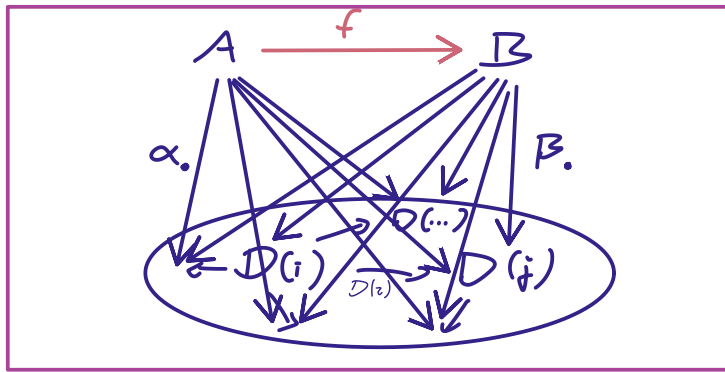
Konkret wird ein Kegel beschrieben durch eine Familie von Morphismen $\alpha_i = \{\alpha_i: A \rightarrow D(i) \mid i \in \text{ob } I\}$ derart, dass

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \alpha_i \swarrow & & \searrow \alpha_j \\ D(i) & \xrightarrow{D(j)} & D(j) \\ & D(i) & \end{array}$$

kommutiert für jeden Morphismus $i \xrightarrow{z} j$ in I .



Sind (A, α_*) und (B, β_*) zwei Kegel über D , so ist ein Morphismus von Kegeln $(A, \alpha_*) \xrightarrow{f} (B, \beta_*)$ ein Morphismus $f: A \rightarrow B$ in $\mathcal{C}$, sodass $\beta_i \circ f = \alpha_i$ für jedes $i \in \text{ob } I$.



Wir erhalten so die Kategorie der Kegel über D .

6. Def.: $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor, $D \in \text{ob } \mathcal{D}$

Die Kategorie $F \downarrow D$ hat

Objekte: (A, α) mit $A \in \text{ob } \mathcal{C}$, $\alpha: FA \rightarrow D$

$\text{Hom}_{F \downarrow D}((A, \alpha), (B, \beta))$

$$:= \left\{ A \xrightarrow{f} B \text{ in } \mathcal{C} \mid \begin{array}{ccc} & FF & \\ FA & \xrightarrow{\quad} & FB \\ \alpha \searrow & & \swarrow \beta \\ & D & \end{array} \text{ kommutiert} \right\}$$

Die Kategorie $D \downarrow F$ hat

Objekte: (A, α) mit $A \in \text{ob } \mathcal{C}$, $\alpha: D \rightarrow FA$

$\text{Hom}_{D \downarrow F}((A, \alpha), (B, \beta))$

$$:= \left\{ A \xrightarrow{f} B \text{ in } \mathcal{C} \mid \begin{array}{ccc} & D & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ FA & \xrightarrow{Ff} & FB \end{array} \text{ kommutiert} \right\}$$

7. Bsp.: $\mathcal{D} \downarrow D = \text{Id}_{\mathcal{D}} \downarrow D$ (siehe K1, Bsp. 1 (f))

8. Notiz: Kategorie der Kegel über D ist isomorph zu

$\Delta \downarrow D$ für $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$

(wie in Notiz 4).

$$A \mapsto \Delta A$$

Kategorie der
Diagramme der
Form I in $\mathcal{C}$

9. Def.: Sei $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm in $\mathcal{C}$.
Ein **Limit** von D ist eine Darstellung von

$$F_D: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$$

$$\begin{array}{ccc} B & \mapsto & \{ \text{Kegel über } D \\ & & \text{mit Spitze } B \} \quad (B, \alpha \circ f) \\ f \downarrow & & \uparrow f^* \\ A & \mapsto & \{ \text{Kegel über } D \\ & & \text{mit Spitze } A \} \quad (A, \alpha) \end{array}$$

also ein Paar $(L, (L, \lambda.))$ derart, dass

$$\text{ob}_{\mathcal{C}} \uparrow F_D(L)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, L) \longrightarrow \{ \text{Kegel über } D \text{ mit Spitze } B \}$$

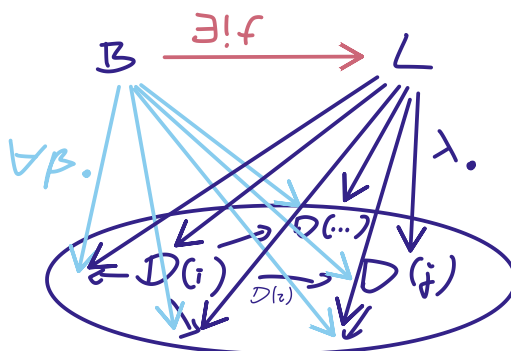
$$f \mapsto F_D(f)(L, \lambda.) = (B, \lambda \circ f)$$

ein Isomorphismus ist.

Wir schreiben für $(L, (L, \lambda.))$ kurz $(L, \lambda.)$.

10. Notiz: Konkret bedeutet die $\exists!$ von $(L, \lambda.)$ also:

Für jeden Kegel $(B, \beta.)$ über D existiert genau ein Morphismus $f: B \longrightarrow L$ in $\mathcal{C}$ mit $\beta. = \lambda. \circ f$.



11. Notiz: $(L, \lambda.)$ ist Limit von D

$\iff (L, \lambda.)$ ist Endobjekt von $\Delta \downarrow D$.

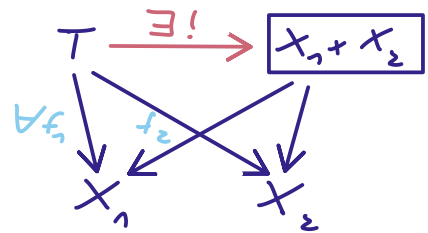
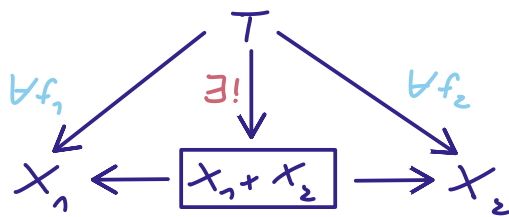
12. Bsp:

(a) binäres Produkt

Ein Produkt von $x_1, x_2 \in \text{ob } \mathcal{C}$ ist ein Limes über

$$D: \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & x_1 \\ 2 & \longmapsto & x_2 \end{array}$$



(b) beliebiges Produkt

I Menge, aufgefasst als diskrete Kategorie

Ein Limes über ein $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$

$$i \longmapsto x_i$$

heißt Produkt der x_i (übliche Notation: $\prod_{i \in I} x_i$).

Unterbsp.: in $\mathcal{C} = \text{Set}, \text{Group}, \text{Ab}, \text{Mod}_R, \text{Top}$ ist das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} x_i$ (mit komponentenweiser Addition etc. / Produkttop.) so ein Produkt.

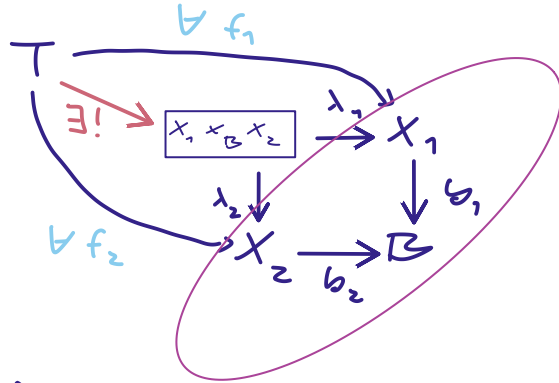
(c) Faserprodukt / Pullback

Ein Diagramm $D: \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ & \bullet \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{C}$

können wir visualisieren als



Ein Limites $X_1 \times_{b_1, B, b_2} X_2$ oder $X_1 \times_B X_2$
über solch einem Diagramm heißt
Faserprodukt von b_1 & b_2 /
Pullback von b_1 entlang b_2



Die $\mathcal{U}$ besagt:

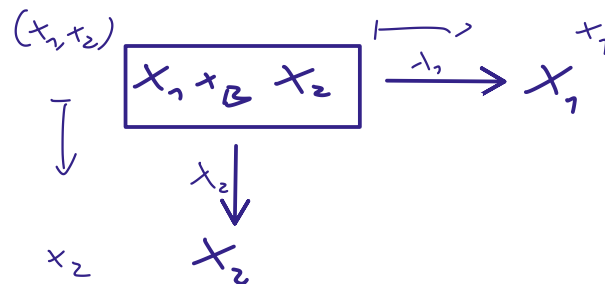
- $b_1 \circ \lambda_1 = b_2 \circ \lambda_2$
- zu je zwei Morphismen
 $f_1: T \rightarrow X_1$
 $f_2: T \rightarrow X_2$ mit $b_1 \circ f_1 = b_2 \circ f_2$ existiert genau
ein Morphismus $f: T \rightarrow X_1 \times_B X_2$ mit $\lambda_1 \circ f = f_1$
 $\lambda_2 \circ f = f_2$.

Unterbsp.:

in $\mathcal{C} = \text{Sets}$ ist

$$X_1 \times_B X_2 = \{ (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid b_1(x_1) = b_2(x_2) \}$$

zusammen mit den kanonischen Projektionen



so ein Faserprodukt.

in $\mathcal{C} = \text{Grp}, \text{Ab}, \text{Mod}_R$ analog

in $\mathcal{C} = \text{Top}$: stattd. $X_1 \times_B X_2$ mit Untertopologie
bzgl. Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$.

(d) inverser/sequentieller Limes

Betrachte $I := (\mathbb{N}, \leq)^{op}$

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \dots$$

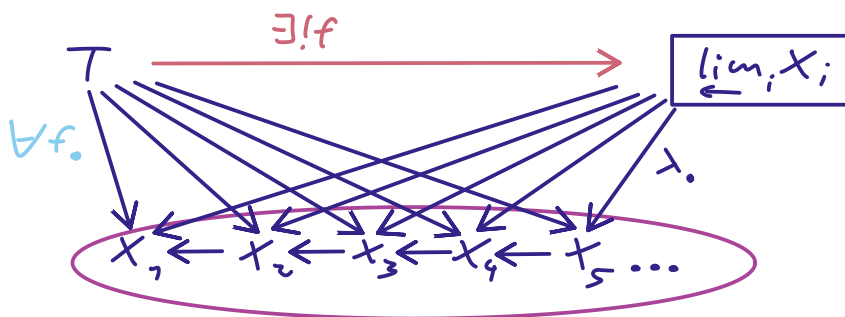
Ein Diagramm $D: I \longrightarrow \mathcal{B}$ können wir visualisieren als Sequenz

$$x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow x_3 \leftarrow x_4 \leftarrow x_5 \dots$$

mit je einem Morphismus $x_j \xleftarrow{p_{jk}} x_k$ für jedes $j \leq k$.

(Es reicht, die Morphismen $p_{j,j+1}$ anzugeben.)

Ein Limes $(\boxed{\lim_i x_i}, \lambda)$ über D heißt **inverser/sequentieller Limes** x_i .



$\mathcal{B} = \text{Sets}$:

$$\boxed{\lim_i x_i} := \left\{ (x_i)_i \in \prod_{i \in I} x_i \mid p_{i,i+1}(x_{i+1}) = x_i \quad \forall i \right\}$$

(Aus $f_i: T \longrightarrow x_i$ erhalten

wir $f: T \longrightarrow \boxed{\lim_i x_i}$.)
 $t \mapsto (f_i(t))_i$

$\mathcal{B} = \text{Ab}, \text{Mod}_R, \text{Rings}$

- genauso, Add. etc. komponentenweise

$$\text{z.B.: } \mathbb{Z}_p \cong \varprojlim (\mathbb{Z}/p \leftarrow \mathbb{Z}/p^2 \leftarrow \mathbb{Z}/p^3 \leftarrow \dots)$$

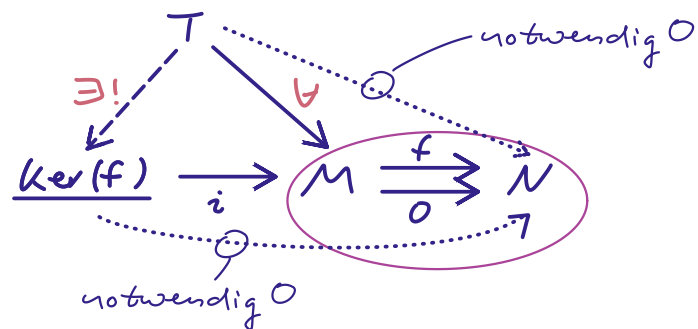
p -adische Zahlen

$$\text{z.B. } \mathbb{R}[[t]] \cong \varprojlim \left(\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}[t]}{(t)} \leftarrow \frac{\mathbb{R}[t]}{(t^2)} \leftarrow \frac{\mathbb{R}[t]}{(t^3)} \leftarrow \dots \right)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \hat{=} (a_0, a_0 + a_1 t, a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \dots)$$

Potenzreihenring

(e) ein Kern von $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R
 ist ein Limes von $M \xrightarrow[f]{0} N$ (vgl. K4, Bsp. 10a).



13. Def.: Kokegel und Kolimiten

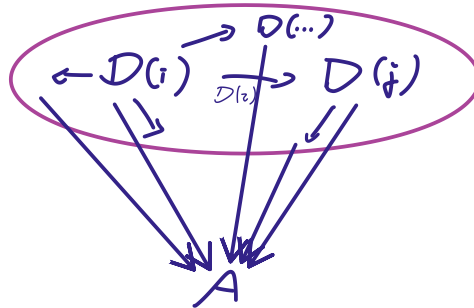
„wie Kegel & Limiten, aber alle Pfeile umgedreht“

Also: Kokegel unter einem Diagramm $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ mit

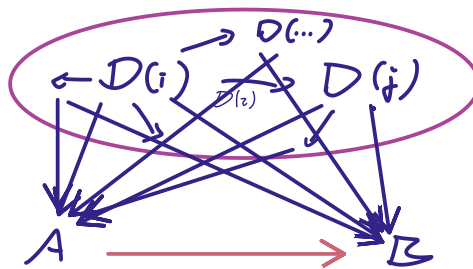
Spitze $A \in \text{ob } \mathcal{C}$:

natürliche Trafo

$$\begin{matrix} D \\ \downarrow \\ \Delta A \end{matrix}$$

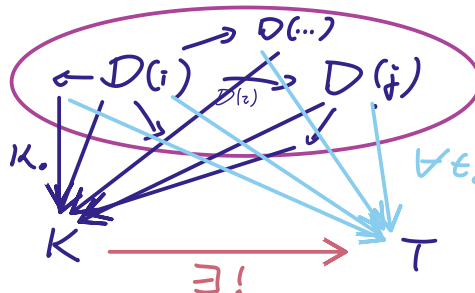


Morphismen von Kokegeln:



Kategorie der Kokegelisomorph zu $D \downarrow \Delta$
für $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$.

Universelle Eigenschaft eines Kolimes (K, κ_*)
unter D :



Für jeden Kokegel (T, τ_*) unter D existiert
genau ein $f: K \rightarrow T$ mit $\tau_i = f \circ \kappa_i$ $\forall i \in \text{ob } I$.
(Ein Kolimes ist also ein Anfangsobjekt in $D \downarrow \Delta$.)

14. Beispiel:

(a) ein binäres Koprodukt ist ein Kolimes von

$$D: \begin{pmatrix} \circ_1 \\ \circ_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

(b) beliebiges Koprodukt:

I Menge, aufgefasst als diskrete Kategorie

Kolimes $\coprod X_i$ von $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$ heißt

Koprodukt der X_i .

$\mathcal{C} = \text{Set}, \text{Top}$

$$\coprod X_i = \coprod_i X_i \quad \text{disjunkte Vereinigung (mit Summentopologie)}$$

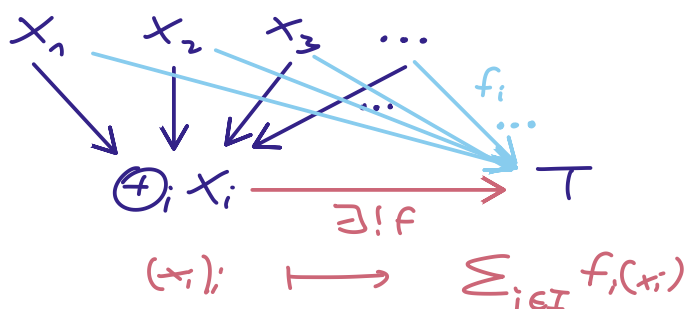
$\mathcal{C} = \text{Ab}, \text{Mod}_R$

$$\coprod X_i = \bigoplus_{i \in I} X_i$$

$$:= \{ (x_i)_i \in \prod_{i \in I} X_i \mid \text{fast alle } x_i = 0 \}$$

Zusammen mit den kanonischen Abb.

$$\begin{aligned} X_i &\longrightarrow \bigoplus_i X_i \\ x_i &\longmapsto (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots) \end{aligned}$$



(c) Amalgam / Pushout

Ein Komplex von $\alpha_2 \downarrow$ in $\mathcal{C}$ heißt

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha_1} & X_1 \\ & \downarrow \alpha_2 & \\ & X_2 & \end{array}$$

Amalgam von α_1 und α_2 /

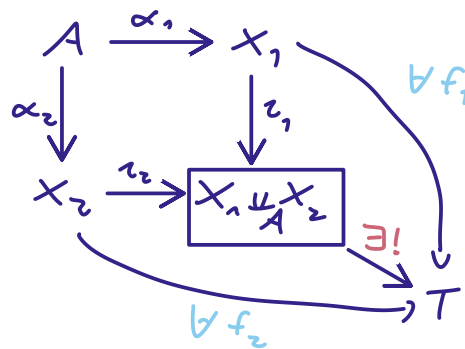
Pushout von α_1 entlang α_2 ,

geschrieben

$$X_1 \amalg_{\alpha_1, A, \alpha_2} X_2$$

oder kurz

$$X_1 \amalg_A X_2$$



$\mathcal{C} = \text{Sets}$

$$X_1 \amalg_A X_2 := \frac{X_1 \amalg X_2}{\sim}, \quad \text{wobei } \sim \text{ die von } (\alpha_1(a), 1) \sim (\alpha_2(a), 2) \text{ (für } a \in A \text{) erzeugte Äquivalenzrelation ist,}$$

zusammen mit

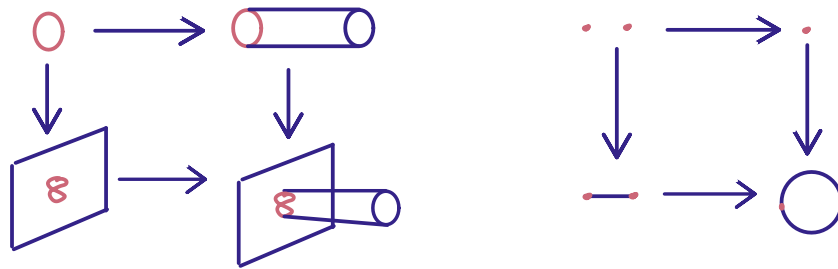
$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{z_i} & \frac{X_1 \amalg X_2}{\sim} \\ x & \mapsto & (x, i) \end{array} \quad \text{erfüllt}$$

die geforderte $\exists!$.

$\mathcal{C} = \text{Top}$

Statt $X_1 \amalg_A X_2$ mit der Quotienten-topologie bzgl. der Summentopologie auf $X_1 \amalg X_2$ und $X_1 \amalg X_2 \twoheadrightarrow X_1 \amalg_A X_2$ aus.

z.B.



(d) sequentieller Kolimes / direkter Limes

Ein Diagramm $D: (\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow \mathcal{C}$ können wir visualisieren als

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow \dots$$

mit je einem Morphismus $z_{kj}: x_j \rightarrow x_k$ für $j \leq k$.
($z_{kk} = \text{id}$)

Ein Kolimes von D heißt

sequentieller Kolimes oder direkter Limes,
geschrieben $\varinjlim_i x_i$ oder $\varprojlim_i x_i$.

$\mathcal{C} = \text{Sets}$

$$\varinjlim_i x_i = \frac{\coprod x_i}{\sim}, \text{ wobei } \sim \text{ folgende}$$

Äquivalenzrelation ist

$$(x, j) \sim (x', k) \iff \exists l \geq k, j: z_{lj}(x) = z_{lk}(x'),$$

zusammen mit den offensichtlichen Abb.

$$x_i \rightarrow \frac{\coprod x_i}{\sim} \text{ hat die geforderte UE.}$$

Übung: Sind alle z_{jk} injektiv, so ist

$$\varinjlim_i x_i = \bigcup_i x_i$$

$\mathcal{C} = \text{Top}$ — analog

(Das definiert eine Kanonische Topologie auf unendlichen Vereinigungen, nämlich:

$$U \subseteq \bigcup_i X_i \text{ offen} \iff U \cap X_i \text{ offen in } X_i \text{ für jedes } i.)$$

$\mathcal{C} = \text{Ab}, \text{Mod}_R$

Auch hier existiert $\text{colim}_i X_i$, und kann als Quotient von $\bigoplus_i X_i$ konstruiert werden.

(e) ein Kokern von $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R
ist ein Kolimes von $M \xrightarrow[f]{\quad} N$ (vgl. K4, Bsp. 106).