

K6: Adjunktionen

1. Def.: Zwei Funktoren $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ bilden eine Adjunktion, falls es natürliche Bijektionen der Form

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$$

gibt.

F heißt dann linksadjungiert zu G ,
 G heißt rechtsadjungiert zu F ,
 geschrieben $F \dashv G$.

„Natürlich“ bedeutet hier, dass für beliebige Morphismen $f: X' \rightarrow X$ in $\mathcal{C}$
 und $g: Y \rightarrow Y'$ in $\mathcal{D}$

das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{h} \\
 \downarrow & f^* \downarrow (Gg)_* & (Ff)^* \downarrow g_* & & \downarrow \\
 Gg \circ h \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', GY') & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX', Y') & \xrightarrow{\sim} & g_* \tilde{h} \circ Ff
 \end{array}$$

Aus der Definition erhalten wir für jedes X in $\mathcal{C}$
 einen Morphismus $\mu_X: X \rightarrow GFX$ mit

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GFX) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FX),$$

$\underbrace{\quad}_{\mu_X} \quad \mapsto \quad \underbrace{\quad}_{id_{FX}}$

genauso für jedes Y aus $\mathcal{D}$ ein $\eta_Y: FG Y \rightarrow Y$,
 sodass:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(GY, GY) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGY, Y)$$

$\underbrace{\quad}_{id_{GY}} \quad \mapsto \quad \underbrace{\quad}_{\eta_Y}$

2. Lemma & Def.: Wir erhalten so natürliche
 Trafas $\mu: \text{Id}_\mathcal{C} \rightsquigarrow GF$, die **Einheit** der Adj.,
 und $\eta: FG \rightsquigarrow \text{Id}_\mathcal{D}$, die **Koeinheit**.

Beweis zu μ :

Für $f: X \rightarrow X'$ in $\mathcal{C}$ ist zu zeigen:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mu_X} & GF X \\ f \downarrow & & \downarrow GF(f) \\ X' & \xrightarrow{\mu_{X'}} & GF X' \end{array}$$

$$\mu_{X'} \circ f = GF(f) \circ \mu_X$$

Das folgt aus:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_\mathcal{C}(X, GF X) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_\mathcal{D}(FX, FX) \\ \downarrow (GFf)_* & & \downarrow (Ff)_* \\ \text{Hom}_\mathcal{C}(X, GF X') & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_\mathcal{D}(FX, FX') \\ \uparrow \text{GFf} \circ \mu_X & \xrightarrow{\quad} & \uparrow Ff \\ \text{Hom}_\mathcal{C}(X', GF X') & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_\mathcal{D}(FX', FX') \\ \uparrow \mu_{X'} & & \uparrow \text{id}_{FX'} \end{array}$$

f^* (vertical arrow from $\text{Hom}_\mathcal{C}(X', GF X')$ to $\text{Hom}_\mathcal{C}(X, GF X')$)
 $(Ff)^*$ (vertical arrow from $\text{Hom}_\mathcal{D}(FX', FX')$ to $\text{Hom}_\mathcal{D}(FX, FX')$)

" $f = \text{id}$ "
 " $g = Ff$ "
 " $f = f$ "
 " $g = \text{id}$ "

□

3. Beispiele

(a) freie Funktoren $\dashv$ vergessliche Funktoren

$$\text{Sets} \xrightleftharpoons[\eta]{F} \text{Groups} \quad F(S) = \langle S \rangle$$

$$\text{Hom}_{\text{Sets}}(S, \iota G) \cong \text{Hom}_{\text{Groups}}(\langle S \rangle, G)$$

$$\underbrace{\text{Hom}_{\text{Sets}}(*, \iota G)}_{\cong \iota G} \cong \text{Hom}_{\text{Groups}}(\mathbb{Z}, G)$$

Für eine Menge S ist $\mu_S: S \xrightarrow{\quad} \mathcal{U}F(S)$.

$$\text{Sets} \xrightleftharpoons[u]{F} \text{Ab}$$

$$F(S) = \bigoplus_S \mathbb{Z}$$

$$\text{Hom}_{\text{Sets}}(S, \mathcal{U}A) \cong \text{Hom}_{\text{Ab}}\left(\bigoplus_S \mathbb{Z}, A\right)$$

$$\text{Sets} \xrightleftharpoons[u]{F} \text{Mod}_R \quad - \text{ analog}$$

$$(b) \text{ Groups} \xrightleftharpoons[I]{(-)^{ab}} \text{Ab}$$

I : Inklusion

$G^{ab} :=$ Abelianisierung

$$(\quad = G / [G, G] \quad)$$

↑ Kommutator-
untergruppe

$$\begin{array}{ccc} \text{von } G & \xrightarrow{(*)} & G^{ab} \\ & \searrow \text{f} & \swarrow \text{!} \\ & A & \\ & \text{abelsch} & \end{array}$$

$$\text{Also } \text{Hom}_{\text{Ab}}(G^{ab}, A) \cong \text{Hom}_{\text{Groups}}(G, IA)$$

Hier ist $\mu_G: G \rightarrow IG^{ab}$ gerade die universelle
Quotientenabb. $(*)$,

und $\gamma_A: (IA)^{ab} \rightarrow A$ ein Isomorphismus.

$$(c) \text{ Sets} \xrightleftharpoons[u]{S} \text{Top} \xrightarrow{K}$$

S : diskrete Topologie

U : Vergiss

K : Klumpentopologie

$$S \dashv U:$$

$$\text{Hom}_{\text{Sets}}(S, UX) \cong \text{Hom}_{\text{Top}}(SS, X)$$

$$U \dashv K:$$

$$\text{Hom}_{\text{Sets}}(UX, S) \cong \text{Hom}_{\text{Top}}(X, KS)$$

(a) Betrachte für eine feste Menge Y die Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \text{Sets} & \xrightarrow{- \times Y} & \text{Sets} \\ \begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ X' \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} X \times Y \\ \downarrow f \times \text{id}_Y \\ X' \times Y \end{array} \end{array}$$

und

$$\text{Sets} \xleftarrow{\text{Hom}_{\text{Sets}}(Y, -)} \text{Sets}$$

Es ist $(- \times Y) \dashv \text{Hom}_{\text{Sets}}(Y, -)$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Sets}}(X, \text{Hom}_{\text{Sets}}(Y, Z)) & \cong & \text{Hom}_{\text{Sets}}(X \times Y, Z) \\ f & \mapsto & ((x, y) \mapsto f(x)(y)) \\ (x \mapsto (y \mapsto g(x, y))) & \mapsto & g \end{array}$$

„Exponentialgesetz“: $(Z^Y)^X \cong Z^{X \times Y}$

analog: R kommutativer Ring, $M \in \text{ob Mod}_R$

$$\text{Mod}_R \xrightleftharpoons[\text{Hom}_R(M, -)]{- \otimes_R M} \text{Mod}_R$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(L, \text{Hom}_R(M, N)) & & \text{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \\ \text{wie in Sets} \cong & & \cong \\ & \text{Hom}_R\text{-bilinear} & (L \times M, N) \end{array}$$

$\cong$ via $\otimes_R$

Alle diese Bijektionen sind natürlich (Übung).

allgemeiner, für beliebigen Ring R :

$M \in \text{ob}_R \text{Mod}$ liefert Adjunktion $\text{Mod}_R \xrightleftharpoons[\text{Hom}_Z(M, -)]{- \otimes_R M} \text{Ab}$

$\text{Hom}_Z(M, A)$ ist Rechts- R -Modul via
 $(f \cdot r)(m) := f(r \cdot m)$ für $r \in R, m \in M, f: M \rightarrow A$

$A \otimes_Z M$ ist Rechts- R -Modul:
 M3, Satz 12

$M \in \text{ob Mod}_R$ liefert Adjunktion $\text{Ab} \xrightleftharpoons[\text{Hom}_R(M, -)]{- \otimes_Z M} \text{Mod}_R$

(e) Abbildung von Mengen $X \xrightarrow{f} Y$ definiert Funktoren

halbgeordnete Menge, aufgefasst als Kategorie $\mathcal{P}(X, \subseteq) \xrightleftharpoons[\text{f}_!]{\text{f}} \mathcal{P}(Y, \subseteq)$

$f \mapsto f^!$: Für $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ gilt:

$$U \subseteq f^! V \Leftrightarrow f U \subseteq V$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}(X)}(U, f^! V) = \text{Hom}_{\mathcal{P}(Y)}(f U, V)$$

Für $f_! U :=$ größte Teilmenge $V \subseteq Y$ mit $f^! V \subseteq U$

$$= \bigcup_{V: f^! V \subseteq U} V$$

gilt:

$$f^! \dashv f_! : f^! V \subseteq U \Leftrightarrow V \subseteq f_* U$$

z.B.

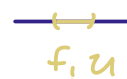
$$X = [0, 1] \times [0, 1]$$

(x, y)

$\downarrow$

x

$$Y = [0, 1]$$



4. Satz: Eindeutigkeit

Seien Funktoren $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[u, \nu]{F} \mathcal{D}$ gegeben.

Ist $F \dashv U$ und $F \dashv V$, so ist $U \cong V$.

M.c.W: Rechtsadjungierte Funktoren sind eindeutig bis auf natürliche Isomorphie.

Analog: Linksadjungierte Funktoren sind eindeutig.

Beweisskizze für lokal kleine Kategorien:

Für $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ und $Y \in \text{ob } \mathcal{D}$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, UY) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, VY),$$

also

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, UY) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, VY), \text{ natürlich in } X \in \mathcal{C}.$$

Für festes Y erhalten wir also einen natürlichen

Isomorphismus

$$\underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, UY)}_{\gamma(UY)} \cong \underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, VY)}_{\gamma(VY)}.$$

Also ist $UY \cong VY$ nach Yoneda-Lemma – siehe K4, Anmerkung 5a.

Prüfe, dass dieser Isomorphismus natürlich ist in Y .

□

5. Lemma: Sei $F \rightarrow G$, $\mu: \text{Id}_B \rightsquigarrow GF$ Einheit, $\eta: FG \rightsquigarrow \text{Id}_D$ Koeinheit.

Die Adjunktion kann explizit beschrieben werden wie folgt:

$$\text{Hom}_B(X, GY) \iff \text{Hom}_D(FX, Y)$$

$$X \xrightarrow{f} GY \mapsto \left(\begin{array}{c} FX \xrightarrow{Ff} FG Y \\ \downarrow \eta_Y \\ Y \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} X \\ \mu_X \downarrow \\ G F X \end{array} \xrightarrow{Gg} G Y \right) \leftarrow \begin{array}{c} FX \xrightarrow{f} Y \end{array}$$

Beweis:

$$(\rightarrow) \quad \begin{array}{ccc} \text{id}_B \circ \uparrow & \xrightarrow{\quad} & \eta \circ \downarrow \\ \downarrow f & \text{Hom}_B(GY, GY) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_D(FGY, Y) & \downarrow \eta \\ & \downarrow f^* & \downarrow (Ff)^* \\ & \text{Hom}_B(X, GY) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_D(FX, Y) & \downarrow \eta \circ Ff \end{array}$$

$(\leftarrow)$ analog / siehe Beweis zu Lemma 2. $\square$

6. Lemma & Def.: Die Einheit μ und Koeinheit η einer Adjunktion $F \rightarrow G$ erfüllen die **Dreiecksgleichungen**:

Die Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\mu} & FG F \\ \text{id}_F \searrow & & \downarrow \eta_F \\ & & F \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{G\eta} & GFG \\ \text{id}_G \searrow & & \downarrow G\eta \\ & & G \end{array}$$

kommutieren.

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_B(GY, GY) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_D(FGY, Y) \\ \downarrow \eta_Y \circ \mu_{GY} & \xleftarrow{\text{Lemma 5}} & \downarrow \eta_Y \\ \text{id}_{GY} & \xleftarrow{\text{Def. / Lemma 5}} & \end{array}$$

$\square$

7. Satz: Für zwei Funktoren $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[F]{F} \mathcal{D}$ gilt genau dann $F \dashv G$, wenn es natürliche Transform.

$\mu: \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightrightarrows GF$
 und $\gamma: FG \rightrightarrows \text{Id}_{\mathcal{D}}$
 gibt, die die Dreiecksgleichungen erfüllen.

Beweis:

(↓) Lemma 6

(↑) Definiere Adjunktion wie in Lemma 5:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \xrightleftharpoons[\psi]{\varphi} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$$

$$X \xrightarrow{f} GY \mapsto \begin{pmatrix} FX \xrightarrow{Ff} FG Y \\ \downarrow \gamma_Y \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ \mu_X \downarrow \\ GF X \xrightarrow{Gg} GY \end{pmatrix} \mapsto FX \xrightarrow{f} Y$$

$$(\varphi = \text{id}): \psi \varphi (X \xrightarrow{f} GY) =$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & GY & & \\ \mu_X \downarrow & \text{Natürlichkeit von } \mu & \downarrow \mu_{GY} & \triangle & \text{id}_{GY} \\ GF X & \xrightarrow{GFf} & GF GY & \xrightarrow{G\gamma_Y} & GY \end{array}$$

($\gamma = \text{id}$): ähnlich

Bijektion natürlich:

$$\begin{array}{ccc} h \vdash & & \gamma \circ Fh \\ \downarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) & \downarrow \\ & f^* \downarrow (Gg)_* & (Ff)^* \downarrow g_* \\ & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', GY') \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX', Y') & g \circ \gamma \circ Fh \circ Ff \\ Gg \circ h \circ f \vdash & & \gamma \circ FGg \circ Fh \circ Ff \end{array}$$

n.z.z: $g \circ \gamma = \gamma \circ FGg$ - Das ist Natürlichkeit von γ . $\square$

8. Satz: Sei $F \dashv G$ mit Einheit $\mu: Id \rightarrow GF$
und Koeinheit $\gamma: FG \rightarrow Id$.

F ist genau dann volltreu, wenn μ ein Isomorphismus ist.

G ist genau dann volltreu, wenn γ ein Isomorphismus ist.

Beweis: viel länger als ich dachte, daher hier nur angedeutet.

(γ_Y Epi für jedes $Y \Rightarrow G$ tren)

Ist $Gg_1 = Gg_2$, so betrachte

$$\begin{array}{ccc} FG Y & \xrightarrow{FG g_i} & FG Y' \\ \eta_Y \downarrow & (*) & \downarrow \eta_{Y'} \\ Y & \xrightarrow{g_i} & Y' \end{array}$$

und folgere $g_1 = g_2$.

(η Iso $\Rightarrow G$ außerdem voll)

Δ -Gleichung zeigt: μ_{GY} Iso mit Inversen $G\eta_Y$.

Betrachte zu gegebenem $f: GY \rightarrow GY'$ nun

$$\begin{array}{ccc} GFGY & \xrightarrow{G(Ff)} & GFGY' \\ \uparrow \mu_{GY} & & \uparrow \mu_{GY'} \\ GY & \xrightarrow{f} & GY' \end{array} \quad \begin{array}{l} G(\eta_Y^{-1}) = \mu_{GY} \\ G(\eta_{Y'}^{-1}) = \mu_{GY'} \end{array}$$

(G tren $\Rightarrow \eta_Y$ Epi für jedes Y) Ist $g_1 \eta = g_2 \eta$, so auch

$$\eta \circ FG g_1 = \eta \circ FG g_2$$

(siehe Diagramm in (*) oben),

also unter Adjunktion $Gg_1 = Gg_2$ (vgl. Lemma 5),

also, da G tren, $g_1 = g_2$.

(G volltreu $\Rightarrow \eta$ Iso)

$$(GY \xrightarrow{\mu_{GY}} GFGY) = G(Y \xrightarrow{h} FG Y) \text{ für ein } h$$

Prüfe: $\eta_Y \circ h = id_Y$ und $h \circ \eta_Y = id_{FG Y}$ [...] [...].

□

* Nachtrag: Diese Bedingung ist im Allgemeinen leicht stärker als die Bedingung, dass η ein Epimorphismus in der Kategorie der Funktoren $C \rightarrow D$ und natürlichen Transformation ist; vgl. <https://mathoverflow.net/q/17953>

9. Beispiel: $\text{Group} \xrightleftharpoons[\text{I}]{(\)^{ab}} \text{Ab}$ (vgl. Bsp. 3b)

I ist volltreu, und $\gamma_A: (\text{IA})^{ab} \xrightarrow{\cong} A$.

Eine Äquivalenz $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ besteht aus $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\text{G}]{\text{F}} \mathcal{D}$

und natürlichen Isos $\mu: \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightsquigarrow \text{GF}$
 $\gamma: \text{FG} \rightsquigarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$.

Und für so eine Äquivalenz gilt:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{GY}) \underset{\text{F}}{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\text{FX}, \text{FGY}) \underset{\gamma^*}{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\text{FX}, Y)$$

Ist also jede Äquivalenz eine Adjunktion?

Ja, aber μ und γ sind nicht zwangsläufig Einheit und Koeinheit:

10. Satz (Äquivalenz als Adjunktion)

Ist eine Äquivalenz wie oben gegeben, so existieren

natürliche Isos $\tilde{\mu}: \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightsquigarrow \text{GF}$

und $\tilde{\gamma}: \text{FG} \rightsquigarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$,

die zusammen die Dreiecksgleichungen erfüllen.

Insbesondere gilt also $F \dashv G$ (und auch $G \dashv F$).

Beweis: trickreich

Trick 1: $\text{GF}\mu = \mu_{\text{GF}}$, denn

$$\begin{array}{ccc} \text{Id} & \xrightarrow{\mu} & \text{GF} \\ X & \xrightarrow{\mu_X} & \text{GF}X \\ \mu_X \downarrow & & \downarrow \text{GF}\mu_X \\ \text{GF}X & \xrightarrow{\mu_{\text{GF}X}} & \text{GF}\text{GF}X \end{array}$$

Kommutiert (da μ natürlich)
 und μ_X ist ein Iso.

analog: $\text{FG}\gamma = \gamma_{\text{FG}}$

Trick 2: Definiere $\tilde{\mu} := \mu$,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}: FG &\rightarrow FG \\ \tilde{\eta}_{FG}^{-1} \{ &FGFG \xrightarrow{(F\mu_a)^{-1}} FG \\ &\} \tilde{\eta} \\ &Id_{FG}. \end{aligned}$$

Jetzt kann man „nachrechnen“, dass die Dreiecksgl. erfüllt sind.

$$G\tilde{\eta} \circ \tilde{\mu}_G = id:$$

$$\begin{array}{c} G \xrightarrow{\mu_G} GF G \xrightarrow{\tilde{\mu}_G^{-1}} G \xrightarrow{id} G \\ \begin{array}{c} G\tilde{\eta}_{FG}^{-1} \{ \\ GF GFG \xrightarrow{G(F\mu_a)^{-1}} GF G \\ \} G\tilde{\eta} \end{array} \end{array}$$

Natürlichkeit von η

id

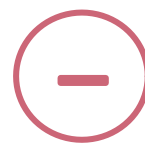
[...]



11. Def.: Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ erhält einen
 Limes (L, λ_*) für ein Diagramm $D: I \rightarrow \mathcal{C}$,
 wenn $(FL, F\lambda_*)$ ein Limes ist für das
 Diagramm $FD: I \rightarrow \mathcal{D}$.
 — analog für Kolimiten —

12. Satz:

R A P L
 Right Adjoints Preserve Limits



Rappel!

Rechtsadjungierte erhalten Limes (soweit sie exist.)
 Linksadjungierte erhalten Kolimiten (soweit sie exist.)

13. Beispiele:

(a) Der Vergessfunktor $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Sets}$

- erhält Limes, da rechtsadj. zum diskreten Funktor
- erhält Kolimiten, da linksadj. zum Klumpenfunktor

(b) Der Vergessfunktor $U: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Sets}$

- erhält Limes, da rechtsadj. zum freien Funktor
- erhält nicht alle Kolimiten, z.B. i.A.

$$U(A_1 \oplus A_2) \neq UA_1 \amalg UA_2$$

(c) Die Inklusion $I: \mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{Groups}$

- erhält Limes, da rechtsadj. zur Abelianisierung
- erhält nicht alle Kolimiten, z.B. i.A.

$$I(A_1 \oplus A_2) \neq IA_1 * IA_2$$

(a) Für eine Abbildung von Mengen $f: X \rightarrow Y$ gilt

$$\begin{aligned} \text{i.A. } f(U_1 \cup U_2) &= fU_1 \cup fU_2 & - f \text{ linksadj. zu } f^{-1} \\ f(U_1 \cap U_2) &\neq fU_1 \cap fU_2 & - f \text{ ist nicht rechtsadj.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_1 \cup U_2) &= f^{-1}U_1 \cup f^{-1}U_2 & - f^{-1} \text{ linksadj. zu } f \\ f^{-1}(U_1 \cap U_2) &= f^{-1}U_1 \cap f^{-1}U_2 & - f^{-1} \text{ rechtsadj. zu } f \end{aligned}$$

-vgl. Bsp. 3.6):

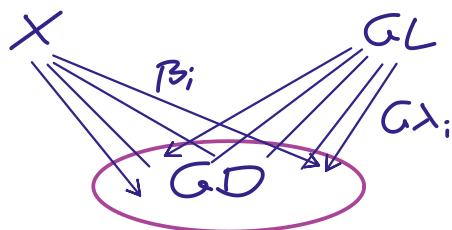
$$(\mathcal{P}(X), \subseteq) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \\ \xrightarrow{f_!} \end{array} (\mathcal{P}(Y), \subseteq)$$

Beweis: Seien $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ adjungierte Funktoren ($F \dashv G$).

Sei (L, λ_*) Limes für $D: I \longrightarrow \mathcal{D}$.

zz: $(GL, G\lambda_*)$ Limes für $GD: I \longrightarrow \mathcal{C}$.

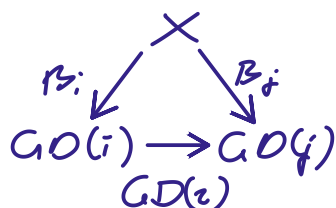
Sei dazu (X, β_*) ein Kegel über GD .



Dem Kegel (X, β_*) über GD entspricht unter der Adjunktion ein Kegel

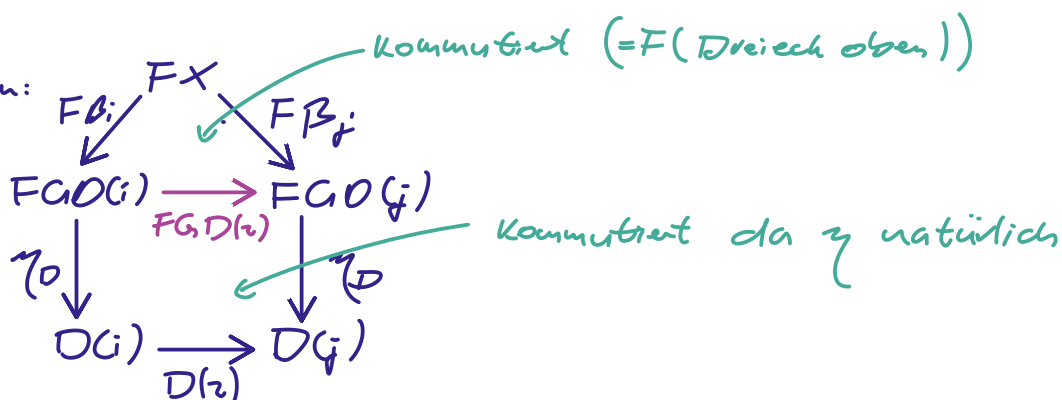
$(FX, \gamma_0 \circ F\beta_*)$ über D .

(Gegeben:



Kommutiert für jedes $i \xrightarrow{z} j$.

Zu zeigen:

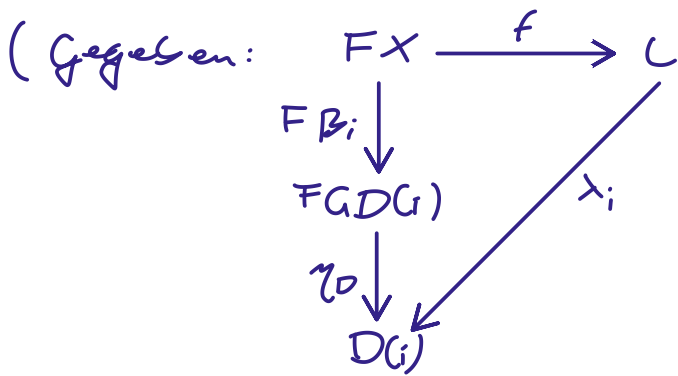


Also existiert genau ein Morphismus von Kegeln

$$f: (FX, \gamma_0 \circ F\beta_*) \longrightarrow (L, \lambda_*)$$

Diesem f entspricht unter der Adjunktion wiederum ein eindeutiger Morphismus von Kegeln

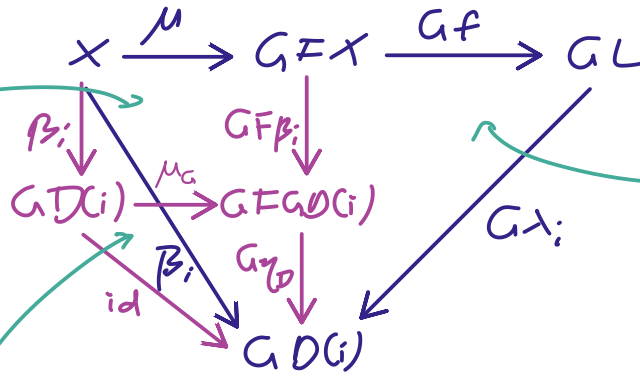
$$Gf_{\text{ops}}: (X, \beta_*) \longrightarrow (GL, G\lambda_*)$$



Kommutiert für alle i in I .

Zu zeigen:

Kommutiert
das μ
natürlich



Kommutiert
(= G (obiges Dreieck))

Δ -Gleichung

)
□