

# K7: Abelsche Kategorien

Beispiele für abelsche Kategorien:

$\text{Ab}$      $\text{Mod}_R$      $\text{Kom}(\text{Mod}_R)$

Prägarben von  $R$ -Moduln  
auf einem top. Raum

Garben von  $R$ -Moduln  
auf einem top. Raum

Beispiele für nicht-abelsche Kategorien:

Groups    Sets    Top    usw. usf.

**1. Def.:** Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  ist **additiv**, falls gilt:

- (1) Die Morphismenmengen  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  bilden abelsche Gruppen  $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), +, 0)$ , und diese Gruppenstruktur ist verträglich mit Komposition:

$$\begin{aligned}(f + g) \circ h &= f \circ h + g \circ h \\ f \circ (h + i) &= f \circ h + f \circ i\end{aligned}$$

$$\text{für } X \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{i} \end{array} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Z$$

- (2) Es gibt ein Nullobjekt  $0$  in  $\mathcal{C}$  (d.h.:  $0$  ist Anfangsobjekt und Endobjekt).

- (3) Binäre Produkte existieren in  $\mathcal{C}$ .

Ein Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwischen additiven Kat. ist **additiv**, falls die Abbildungen

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$$

für alle  $X$  und  $Y$  in  $\mathcal{C}$  Gruppenhomomorphismen sind.

**2. Bemerkung:** Diese Def. ist minimalistisch – lässt sich leicht in Beispielen prüfen.

etwa:

- $A \subseteq \text{Mod}_R$  ✓
- $\text{Kom}(\text{Mod}_R)$ :

$$\text{Hom}_{\text{Kom}(\text{Mod}_R)}(M_\bullet, N_\bullet) \subseteq \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(M_i, N_i)$$

Untergruppe

$0 = \text{Nullkomplex}$

$$M \oplus N: \quad (M \oplus N)_i := M_i \oplus N_i$$

$$d_i^{M \oplus N} = \begin{pmatrix} d_i^M & 0 \\ 0 & d_i^N \end{pmatrix}$$

andererseits:

- $\text{Sets}, \text{Top}$  nicht additiv (denn  $\emptyset \neq *$ )
- $\text{Groups}$  nicht additiv (denn i.A.

$G_1 \times G_2 \not\cong G_1 * G_2$ ,  
und es gilt folgender  
Satz:)

### 3. Satz (Konsequenzen aus Def.)

Sei  $\mathcal{C}$  additive Kategorie.

- (a) In  $\mathcal{C}$  existieren auch binäre Koprodukte, und diese stimmen in folgendem Sinne mit den Produkten überein:

Ist  $X \xleftarrow{\pi_x} X \times Y \xrightarrow{\pi_y} Y$  ein Produkt von  $X$  &  $Y$  in  $\mathcal{C}$ , so ist

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}} X \amalg Y \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \text{id} \end{pmatrix}} Y$$

Ist  $X \xrightarrow{\iota_x} X \amalg Y \xleftarrow{\iota_y} Y$  ein Koprodukt von  $X$  &  $Y$  in  $\mathcal{C}$ , so ist

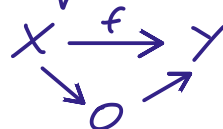
$$X \xleftarrow{(\text{id } 0)} X \amalg Y \xrightarrow{(0 \text{ id})} Y$$

Wir sprechen daher von **Bi**produkten und schreiben  $X \oplus Y$ .

- (b) Für  $f: X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  gilt:  $0 \circ f = 0 = f \circ 0$

Es ist  $f = 0$  g.d.w.  $f$  durch das Nullobjekt

faktorisiert



- (c) Additive Funktoren erhalten das Nullobjekt und (Bi)Produkte, also

$$F(0) \cong 0$$

und insbes.  $F(X \oplus Y) \cong FX \oplus FY$ .

**Beweisfragmente:**

- (b)  $0 \circ f = (0 + 0) \circ f = 0 \circ f + 0 \circ f$ , also  $0 \circ f = 0$   
(üblicher Trick)

Seien  $e: X \xrightarrow{0} 0$  und  $a: 0 \xrightarrow{0} Y$  die eindeutigen Morphismen. Wegen Eindeutigkeit folgt:  $e = 0$  und  $a = 0$ .

- (c) Nutze:  $X \cong 0 \iff \text{id}_X = 0$

□

4. Def.: Kern und Kokern eines Morphismus  $f: X \longrightarrow Y$  lassen sich in jeder additiven Kategorie genauso wie in  $\text{Mod}_R$  definieren als Limes bzw. Kolimes von  $X \xrightarrow[f]{0} Y$   
 - vgl. K4, Bsp. 10 & K5, Bsp. 12 (c) & 14 (c)).

Ein Bild von  $f$  ( $\text{im } f$ ) ist ein Kern eines Kokerns von  $f$ .

Ein Kobild von  $f$  ( $\text{coim } f$ ) ist ein Kokern eines Kerns von  $f$ .

$$\begin{aligned} \text{im } f &= \ker(\text{coker } f) \\ \text{coim } f &= \text{coker}(\ker f) \end{aligned}$$

## 5. Notiz:

(a) Für Morphismus  $i: M \rightarrow N$  in additiven Kategorie sind äquivalent:

- ①  $i$  Mono
- ②  $(i \circ f = 0 \Rightarrow f = 0)$
- ③  $\ker(i) \cong 0$

(b) Für Morphismus  $q: M \rightarrow N$  in additiven Kategorie sind äquivalent:

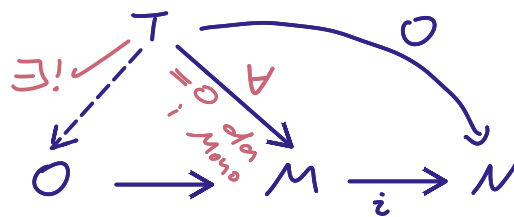
- ①  $q$  Epi
- ②  $(f \circ q = 0 \Rightarrow f = 0)$
- ③  $\operatorname{coker}(q) \cong 0$

Beweisfragmente:

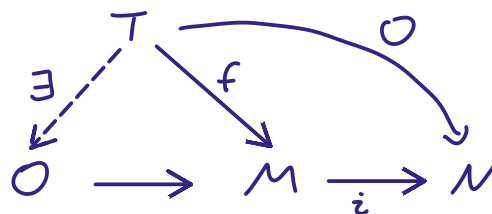
$$(1 \Leftrightarrow 2) \quad i \circ f_1 = i \circ f_2 \Leftrightarrow i \circ (f_1 - f_2) = 0$$

— vgl. M1, Notiz 9 oder Blatt 6, Aufgabe 5  
(ii  $\Leftrightarrow$  iii)

(2  $\Rightarrow$  3): Nullobjekt hat die  $\mathcal{U}$ :



(2  $\Leftarrow$  3) Sei  $i \circ f = 0$ .



Da das Nullobjekt die  $\mathcal{U}$  von  $\ker(i)$  hat, faktorisiert  $f$  durch das Nullobjekt. Also  $f = 0$ . □

6. **Notiz:** In jeder additiven Kategorie sind  
Kerne Monomorphismen,  
Kokerne Epimorphismen.

(siehe Blatt 6, Aufgabe 5 ( $i \Rightarrow i \circ i$ ))

7. **Def.:** Eine abelsche Kategorie ist eine additive  
Kategorie, in der gilt:

(4) Jeder Morphismus besitzt einen Kern  
und einen Kokern.

(5) Für jeden Monomorphismus  $i$  gilt:

$i$  ist ein Bild von  $i$  (also insbes. ein Kern),

für jeden Epimorphismus  $q$  gilt:

$q$  ist ein Kokern von  $q$  (also insbes. ein Kokern)

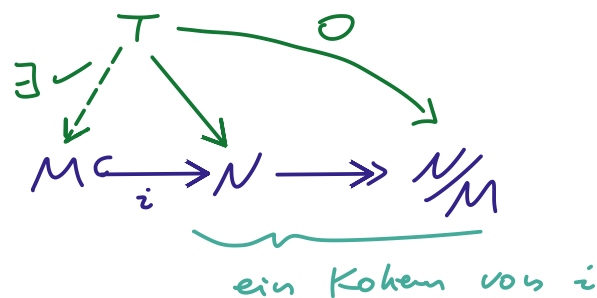
## 8. Satz:

- (a)  $\text{Mod}_R$  ist abelsch (für jeden Ring  $R$ )  
 (b)  $\text{Kom}(\mathcal{A})$  – analog definiert wie  $\text{Kom}(\text{Mod}_R)$  –  
 ist abelsch für jede abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$ .

### Beweisfragmente:

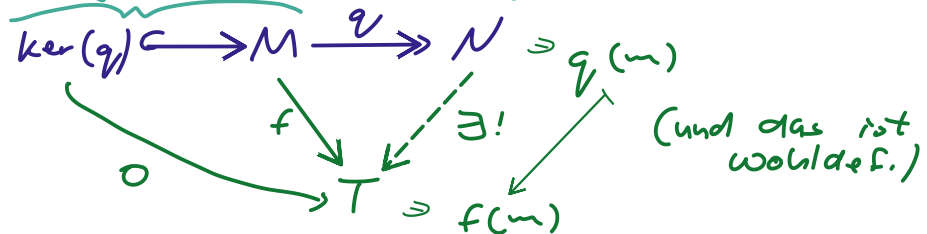
a; 4: ✓ (K4, Beispiel 10)

5: Sei  $i$  Monomorphismus.



Sei  $q$  Epimorphismus.

ein kategorialer Kern von  $q$



6:

4: Def. Kern & Kokern gradweise – siehe Blatt 11, Aufg. 2.

[...]

5: [...]



## 9. Satz: Bildfaktorisierung

In einer abelschen Kategorie stimmen Ziel von  $\text{coim}(f)$  und Quelle von  $\text{im}(f)$  (bis auf Isomorphie) überein und es ist  $f = \text{im}(f) \circ \text{coim}(f)$ .

$$\begin{array}{ccccc} \text{---} & \xrightarrow{\text{ker}(f)} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{coker}(f)} & \text{---} \\ & & \searrow \text{coim}(f) & & \nearrow \text{im}(f) & & \\ & & \bullet & & & & \end{array}$$

"  $\bullet \cong \frac{X}{\text{ker } f} \cong \text{im}(f)$  "

Beweis als Übung.

## Exaktheit & Einbettungssatz

$\mathcal{A}$  abelsche Kategorie

10. Def.: Eine Sequenz von Morphismen

$$\dots \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow \dots$$

in  $\mathcal{A}$  ist **exakt**, falls „ $\text{im}(f) = \text{Ker}(g)$ “, also falls ein Bild von  $f$  ein Kern von  $g$  ist, an jeder Stelle der Sequenz.

Eine **kurze exakte Sequenz** ist eine Sequenz der Form

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

Sie **spaltet**, wenn es einen Morphismus

$$Y \xleftarrow{s} Z$$

gibt mit  $g \circ s = \text{id}_Z$ .

11. Satz: Wie in  $\text{Mod}_R$  gilt auch in beliebiger abelscher Kategorie:

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \text{ exakt} \iff i \text{ Mono}$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0 \text{ exakt} \iff g \text{ Epi}$$

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \text{ exakt} \iff f \text{ ist ein Kern von } g$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0 \text{ exakt} \iff g \text{ ist ein Kokern von } f$$

Beweis als Übung

## 12. Def.: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsch

Ein additiver Funktor  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt:

- **linksexakt**, falls für jede exakte Sequenz

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

auch

$$0 \rightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \quad \text{exakt ist.}$$

- **rechtsexakt**, falls für jede exakte Sequenz

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

auch

$$FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \rightarrow 0 \quad \text{exakt ist.}$$

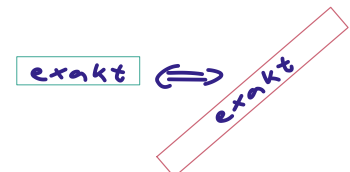
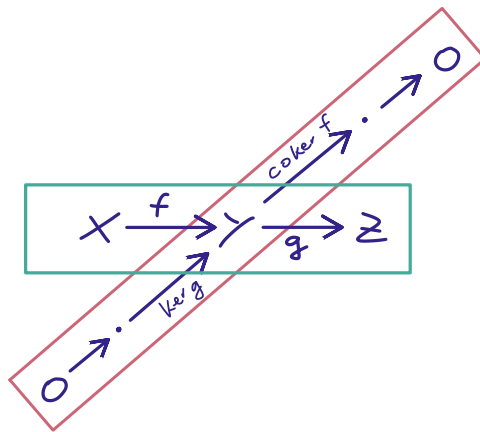
- **exakt**, falls er Exaktheit beliebiger Sequenzen erhält

13. Übung:  $F$  linksexakt  $\Leftrightarrow F$  erhält Kerne

$F$  rechtsexakt  $\Leftrightarrow F$  erhält Kokerne

14. Übung:  $F$  exakt  $\Leftrightarrow F$  ist links- und rechtsexakt.

[Idee:



## 15. Satz:

Rechtsadjungierte additive Funktoren sind linksexakt.  
Linksadjungierte additive Funktoren sind rechtsexakt.

Beweis: Übung 14 & RAPL (K6, Satz 12).

□

16. Übung: Ist  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  exakt und volltreu, so gilt für Komplexe  $M_\bullet$  in  $\mathcal{A}$ :

$$M_\bullet \text{ exakt} \Leftrightarrow F(M_\bullet) \text{ exakt}$$

### 17. Einbettungssatz:

Zu jeder kleinen abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  gibt es einen Ring  $R$  und einen exakten volltreuen Funktor

$$\mathcal{A} \longrightarrow \text{Mod}_R$$

□

18. Korollar: Fünfer-Lemma und Schlangenlemma (M4, Kor. 6) gelten in beliebigen abelschen Kategorien.

(Wende Einbettungssatz und Übung 16 an auf kleine Unterkategorie, die das Diagramm enthält.)

19. Korollar: Eine k.e.S.

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

in einer abelschen Kategorie spaltet (Def. 10) g.d.w. sie isomorph ist zur Sequenz

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Z \xrightarrow{(0 \text{ id})} Z \rightarrow 0,$$

wenn es also ein kommutatives Diagramm gibt der Form:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}} & X \oplus Z & \xrightarrow{(0 \text{ id})} & Z \rightarrow 0 \end{array}$$

(vgl. Beweis zu M2, Satz 6)