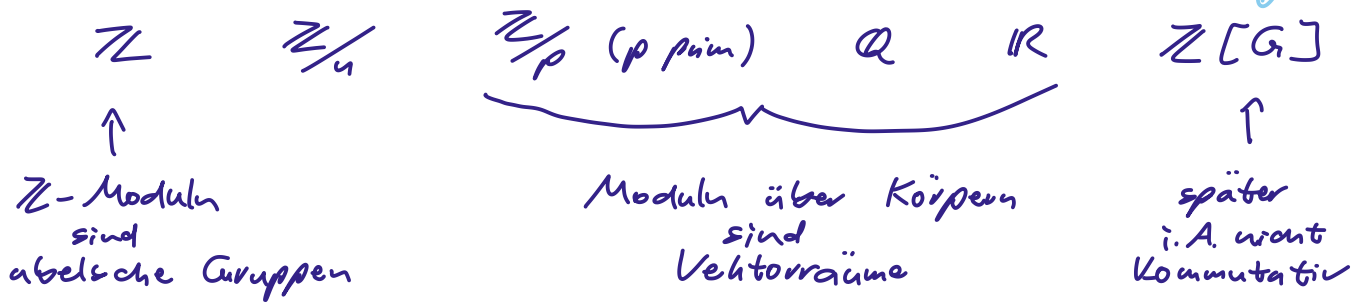


M1: Moduln

R Ring (assoziativ mit 1)

Hauptsächlich für uns interessant:



1. Def: Ein R -Rechtsmodul ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer „Skalarmultiplikation“

$$\begin{array}{ccc} M \times R & \longrightarrow & M \\ (m, a) & \longmapsto & m \cdot a \end{array}$$

für die gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet m \cdot 1 = m \\ \bullet m \cdot (a \cdot b) = (m \cdot a) \cdot b \\ \bullet m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b \\ \bullet (m + n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall m, n \in M \\ \forall a, b \in R \end{array}$$

Eine R -rechtslineare Abbildung / Morphismus von R -Rechtsmoduln zwischen zwei R -Rechtsmoduln M und N ist ein Gruppenhomomorphismus

$$f: (M, +) \longrightarrow (N, +),$$

für den zusätzlich gilt:

$$f(m \cdot a) = f(m) \cdot a \quad \forall m \in M, a \in R$$

Mod_R : Kategorie der R -Rechtsmoduln

2. Beispiele

$R = \mathbb{Z}$ Jede abelsche Gruppe $(M, +)$ ist auf genau eine Weise ein $\mathbb{Z}$ -Modul:

Skalarmultiplikation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} M \times \mathbb{Z} &\longrightarrow M \\ (m, z) &\longmapsto \begin{cases} \underbrace{m + \dots + m}_z \text{ Summanden} & \text{falls } z > 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0 \\ -(m + \dots + m) & \text{falls } z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Jeder Gruppenhomomorphismus zwischen ab.

Gruppen ist $\mathbb{Z}$ -linear. Also:

$$\text{Mod}_{\mathbb{Z}} = \text{Ab}$$

R ein Körper – Dann ist

$$\text{Mod}_R = \text{Vec}_R.$$

$R = \mathbb{Z}/n$ Ein $\mathbb{Z}/n$ -Modul ist dasselbe wie eine ab. Gruppe M , in der gilt:

$$\underbrace{m + \dots + m}_n = 0 \quad \forall m \in M$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_n$ Summanden

Zum Bsp. ist $\mathbb{Z}/20 \oplus \mathbb{Z}/5$ ein $\mathbb{Z}/20$ -Modul.

- R selbst ist ein R -Rechtsmodul via Multiplikation.
- $0 := \{0\}$ ist ein R -Modul für jedes R .

3. Def. & Satz: M ein R -Rechtsmodul

(a) Ein (R Rechts-) Untermodul $M' \subseteq M$ ist eine Untergruppe, auf die sich die Skalarmultiplikation einschränken lässt.

$$(m' \cdot a \in M' \quad \forall m' \in M', a \in R)$$

(b) Ist $M' \subseteq M$ ein Untermodul, so ist die Quotientengruppe M/M' wieder ein R -Rechtsmodul bzgl.

$$\begin{aligned} M/M' \times R &\longrightarrow M/M' \\ \overline{m} \cdot a &\longmapsto \overline{m \cdot a} \end{aligned}$$

M/M' heißt Quotientenmodul.

4. Beispiele

(a) Die R -Rechtsuntermoduln von R heißen Rechtsideale von R .

$$\begin{aligned} \text{Unterbsp.: } \{\text{Ideale von } \mathbb{Z}\} &= \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}\} \\ &= \{n \cdot \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\ \{\text{Ideale von } \mathbb{Z}/n\} &= \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}/n\} \\ &= \{k \cdot \mathbb{Z}/n \mid k \text{ ist Teiler von } n\} \end{aligned}$$

Unterbsp.: K Körper

$$\{\text{Ideale von } K\} = \{0, K\}$$

$$\begin{aligned} \text{Unterbsp.: } \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\} &\subseteq \text{Mat}_{2 \times 2}(K) \\ &\text{ist ein Rechtsideal} \end{aligned}$$

(b) Für jede R -rechtslineare Abb. $f: M \rightarrow N$
sind der **Kern** und das **Bild** Rechtsuntermoduln:

$$\ker(f) := \{ m \in M \mid f(m) = 0 \} \subseteq M$$

$$\operatorname{im}(f) := f(M) \subseteq N$$

Wir erhalten entsprechende Quotientenmoduln:

$$\operatorname{coker}(f) := N / \operatorname{im}(f)$$

$$(\& \quad \operatorname{coim}(f) := M / \ker(f) \quad)$$

5. Def & Satz: M, N R -Rechtsmoduln

$\operatorname{Hom}_R(M, N)$ ($:= \operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod}_R}(M, N)$) ist eine
abelsche Gruppe via

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m) \quad \text{für } m \in M$$

Neutrales Element ist

$$0: M \longrightarrow N \\ m \mapsto 0$$

6. Notiz: Diese additive Struktur ist mit Komposition
verträglich.

$$(a) \quad h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$$

$$(b) \quad (f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$$

Daher erhalten wir auf Mod_R Funktoren

$$\boxed{\operatorname{Hom}_R(M, -): \operatorname{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}}$$

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\quad} & \operatorname{Hom}_R(M, N) \\ h \downarrow & & h_* \downarrow \\ N' & \xrightarrow{\quad} & \operatorname{Hom}_R(M, N') \end{array} \quad h_*(f) = h \circ f$$

$$\operatorname{Hom}_R(-, N): \operatorname{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\operatorname{op}}$$

(a) sagt: h_* ist Gruppenhomomorphismus.

(b) sagt: h^* ist Gruppenhomomorphismus.)

7. Bemerkung: Für kommutatives R ist $\text{Hom}_R(M, N)$
sogar R -Modul, via
$$(f \cdot a)(m) := f(m \cdot a),$$

denn diese Abbildung ist dann R -linear.

8. Def.: Eine Sequenz von R -Modulhomomorphismen
$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

ist exakt, wenn gilt: $\text{im}(f) = \ker(g)$

Eine kurze exakte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0,$$

die an jeder Stelle exakt ist.

9. Notiz:

(a) Für Morphismen $i: M \rightarrow N$ in Mod_R sind äquivalent:

① i injektiv

② i Mono

③ $(i \circ f = 0 \Rightarrow f = 0)$

④ $\ker(i) = 0$

⑤ $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} N$ ist exakt.

(b) Für Morphismen $q: M \rightarrow N$ in Mod_R sind äquivalent:

① q surjektiv

② q Epi

③ $(f \circ q = 0 \Rightarrow f = 0)$

④ $\text{coker}(q) = 0$

⑤ $M \xrightarrow{q} N \rightarrow 0$ ist exakt.

Beweis:

(a) ① $\Leftrightarrow$ ②: wie in Ab

(Elemente $m \in M$ entsprechen 1:1
 R -Modulmorphismen $R \rightarrow M$
 $1 \mapsto m$)

① $\Leftrightarrow$ ③, ③ $\Leftrightarrow$ ④, ① $\Rightarrow$ ② klar

② $\Rightarrow$ ①: Ist $i \circ f = i \circ g$ in Mod_R , folgt
 $i \circ f - i \circ g = 0$, also
 $i \circ (f - g) = 0$.

Aus ② folgt nun $f - g = 0$, d.h. $f = g$.

(b) ähnlich

□

10. Satz: Fünfer-Lemma

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Seri} & 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & \cong \downarrow f & & g \downarrow & & h \downarrow \cong & & \\ & 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

zwei kurze exakte Sequenzen in Mod_R , und f, g, h Morphismen in Mod_R derart, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Sind f und h Isomorphismen, so ist auch g ein Isomorphismus.

Allgemeiner:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Seri} & K & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P \\ & \downarrow e & & \cong \downarrow f & & g \downarrow & & h \downarrow \cong & & \downarrow j \\ & K' & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & P \end{array}$$

zwei exakte Sequenzen in Mod_R , und e, f, g, h, j Morphismen in Mod_R derart, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Ist

e ein Epimorphismus und

f ein Isomorphismus und

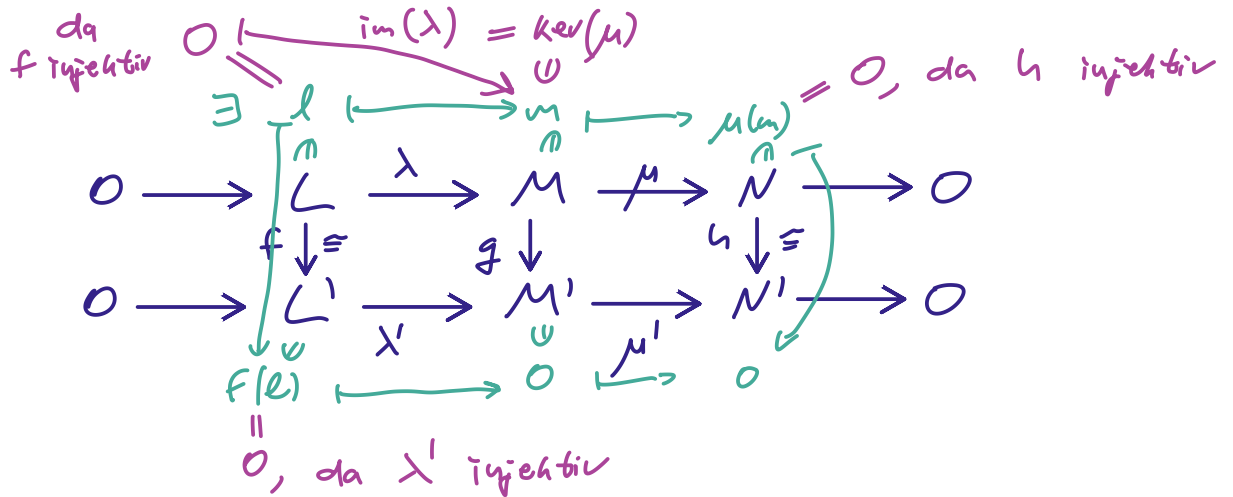
h ein Isomorphismus und

j ein Monomorphismus,

so ist g ein Isomorphismus.

Beweis: ganzunkategorisch: Wir zeigen durch Diagrammjagd, dass g bijektiv ist.

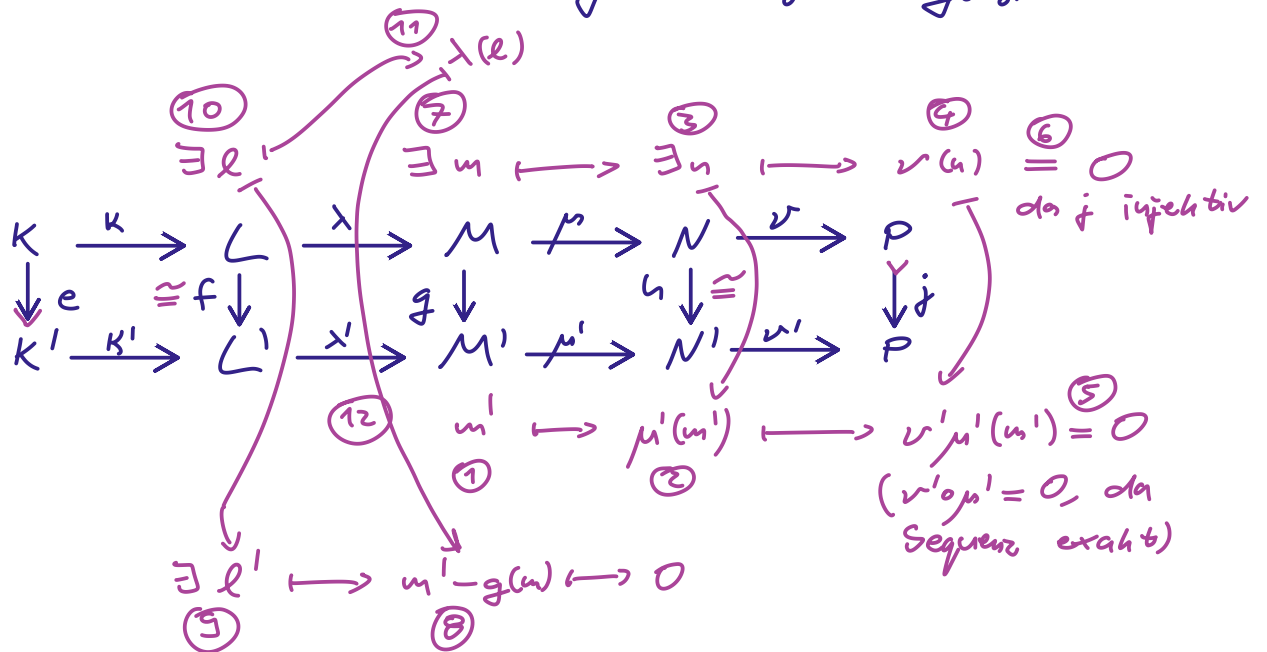
einfache Version: g injektiv:



Also $m = 0$.

allgemeine Version: g surjektiv:

Sei $m' \in M'$. Zu zeigen: $\exists m_0 \in M: g(m_0) = m'$



(12) $g(\lambda(l')) = m' - g(m)$, also $g(\underbrace{\lambda(l') + m}_{m_0}) = m'$.
Wähle also m_0 .

□

11. Satz: Universelle Eigenschaft des Quotienten

Sei $M' \subseteq M$ ein R -Rechtsuntermodul.

Für jeden Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R

mit $f(M') = 0$ existiert genau eine

Faktorisierung durch die Quotientenabb.

$$q: M \longrightarrow \frac{M}{M'}$$

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \curvearrowright & \\ M' \subseteq M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow q & \nearrow \exists! \bar{f} \\ & \frac{M}{M'} & \Rightarrow [m] \end{array} \quad \begin{array}{l} f(m) \\ \text{mit } \bar{f} \circ q = f \end{array}$$

□

12. Korollar (Isomorphiesatz)

Für jeden Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\frac{M}{\ker f} \xrightarrow[\bar{f}]{\cong} \text{im}(f)$$

Beweis:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker f & \longrightarrow & M & \xrightarrow{q} & \frac{M}{\ker f} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong \downarrow \text{id} & & \cong \downarrow \text{id} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \ker f & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & \text{im}(f) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Aus Ser-Semina folgt: $\bar{f}$ ist Isomorphismus.

□