

M3: Tensorprodukt

R Ring mit 1, (zunächst) kommutativ

1. Def.: Seien M, N, L R -Moduln. Eine Abbildung
 $f: M \times N \rightarrow L$

heißt **R -bilinear**, falls sie R -linear in beiden Komponenten ist, also

$$f(u_1 r_1 + u_2 r_2, v) = f(u_1, v) \cdot r_1 + f(u_2, v) \cdot r_2$$

für alle $u_i \in M, r_i \in R$, und analog für v .

2. Def. & Satz: Das Tensorprodukt von zwei

R -Moduln M und N ist ein R -Modul $M \otimes_R N$ zusammen mit einer R -bilinearen Abb.

$$M \times N \xrightarrow{\text{can}} M \otimes_R N$$

mit folgender $\mathcal{U}$:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\text{can}} & M \otimes_R N \\ \downarrow \forall \text{ bilinear } f & & \uparrow \exists! \text{ linear } \tilde{f} \\ & T & \end{array}$$

Für jede R -bilineare Abb. $f: M \times N \rightarrow T$ existiert genau ein R -lineare Abb. $\tilde{f}: M \otimes_R N \rightarrow T$ mit $\tilde{f} \circ \text{can} = f$.

(Formal: $(M \otimes_R N, \text{can})$ ist eine Darstellung von

$$F: \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Sets}$$

$$T \longmapsto \{ M \times N \xrightarrow{f} T \mid f \text{ bilinear} \} .)$$

Existenzbeweis: wie bei Vektorräumen

1. Betrachte freien R -Modul $\bigoplus_{M \times N} R$

mit Basis $\{e(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$

und die Abbildung

$$\begin{aligned} M \times N &\xrightarrow{e} \bigoplus_{M \times N} R \\ (m, n) &\mapsto e(m, n) \end{aligned}$$

Beachte:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{e} & \bigoplus_{M \times N} R \\ & \searrow & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

$\checkmark$ bilinear f $\exists!$ lineares f'

Aber e ist nicht R -bilinear.

2. Teile aus $\bigoplus_{M \times N} R$ den Untermodul Rel heraus,

der erzeugt wird von allen Elementen der Form:

$$e(m_1 r_1 + m_2 r_2, n) - e(m_1, n) \cdot r_1 - e(m_2, n) \cdot r_2$$

$$e(m, n_1 r_1 + n_2 r_2) - e(m, n_1) \cdot r_1 - e(m, n_2) \cdot r_2$$

(für alle $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$, $r_1, r_2 \in R$).

Definiere

$$M \otimes_R N := \frac{\bigoplus_{M \times N} R}{Rel}$$

$$\text{und can: } M \times N \xrightarrow{e} \bigoplus_{M \times N} R \twoheadrightarrow M \otimes_R N.$$

Diese Abbildung ist R -bilinear und besitzt die geforderte UE. □

3. Notation: Für das Bild von $(m, n) \in M \times N$ unter $\text{can}: M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ schreiben $m \otimes n$.

4. Satz (Eigenschaften des Tensorprodukts)

R kommutativer Ring. Für beliebige R -Moduln $M, N, M_1, M_2, M_3, M_i (i \in I)$ und Ideale $\alpha \subseteq R$ haben wir kanonische Isomorphismen

$$(a) \quad M \otimes_R R/\alpha \cong M / M \cdot \alpha$$

$$m \otimes \bar{a} \mapsto \overline{m \cdot a}$$

$$(b) \quad (M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \cong M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$$

mit $(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$

$$(c) \quad M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$$

mit $m \otimes n \mapsto n \otimes m$

$$(d) \quad \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$$

mit $(m_i)_i \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_i$

Beweis:

a: Sei R -bilineare Abb. $M \times R/\alpha \xrightarrow{f} T$ gegeben.

Falls

$$\begin{array}{ccc} (m, \bar{a}) & \mapsto & \overline{m \cdot a} \\ M \times R/\alpha & \xrightarrow{\quad} & M / M \cdot \alpha \\ \downarrow f & & \downarrow \tilde{f} \\ & T & \end{array}$$

für ein R -lineares $\tilde{f}$

Kommutiert, so muss gelten: $\tilde{f}(\bar{m}) = f(m, 1)$

Also gibt es höchstens ein solches $\tilde{f}$.

Andererseits erhalten wir durch die Vorschrift

$\tilde{f}(\bar{m}) := f(m, \bar{1})$ tatsächlich ein wohl-def. R -lineares $\tilde{f}$:

$$\begin{aligned}\tilde{f} \text{ } R\text{-linear: } \tilde{f}(\bar{m}_1 \cdot q_1 + \bar{m}_2 \cdot q_2) &= \tilde{f}(\overline{m_1 \cdot q_1 + m_2 \cdot q_2}) \\ (m_1, m_2 \in M, q_1, q_2 \in R) &= f(m_1 \cdot q_1 + m_2 \cdot q_2, \bar{1}) \\ &= f(m_1, \bar{1}) \cdot q_1 + f(m_2, \bar{1}) \cdot q_2 \\ &= \tilde{f}(\bar{m}_1) \cdot q_1 + \tilde{f}(\bar{m}_2) \cdot q_2\end{aligned}$$

f $\hookrightarrow$ bilinear

$\tilde{f}$ wohl-def.:

zz: $(m \mapsto f(m, \bar{1}))$ verschwindet auf $M \cdot \alpha$.

Ein Element von $M \cdot \alpha$ hat die Form $\sum_i m_i \cdot a_i$

für (endlich viele) $m_i \in M$ und $a_i \in \alpha$.

$$\begin{aligned}f(\sum_i m_i \cdot a_i, \bar{1}) &= \sum_i f(m_i, \bar{1}) \cdot a_i \\ f \text{ bilinear} &\begin{cases} \rightarrow = \sum_i f(m_i, \bar{a_i}) \\ \rightarrow = \sum_i f(m_i, \bar{0}) \\ \rightarrow = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

(b)-(d): wie bei Vektorräumen [...]

□

5. Beispiele:

(a) $R \otimes_R R \cong R$ (als R -Modul: wähle oben in (a) $\alpha = 0$)

(b) $R^{\oplus n} \otimes_R R^{\oplus m} \cong R^{\oplus n \cdot m}$ ((d), (a) & (c))

Allgemeiner: Ist M frei mit Basis $\{e_i \mid i \in I\}$
und N frei mit Basis $\{f_j \mid j \in J\}$,

so ist

$M \otimes_R N$ frei mit Basis $\{e_i \otimes f_j \mid i \in I, j \in J\}$

(c) $M \otimes_R R \cong M$ und $R \otimes_R N \cong N$
für beliebige R -Moduln M und N .

Insbesondere:

$$\mathbb{Z}/a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a$$

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/a \cong \mathbb{Z}/a$$

(d) $\mathbb{Z}/a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b \cong \mathbb{Z}/\text{ggT}(a,b)$

$$\left(\mathbb{Z}/a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b \cong \frac{\mathbb{Z}/a}{\mathbb{Z}/a \cdot b} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \cdot a + \mathbb{Z} \cdot b} \cong \mathbb{Z}/\text{ggT}(a,b) \right)$$

Beispiel (b) beschreibt Tensorprodukt vollständig für Vektorräume.

Beispiele (b)–(d) zusammen mit Verträglichkeit mit $\oplus$ (Satz 4 (d)) beschreibt Tensorprodukt vollständig für endlich-erzeugte abelsche Gruppen. z.B.

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5 &\cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5 \\ &\cong \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/\text{ggT}(3,5) \\ &\cong \mathbb{Z}/5 \end{aligned}$$

(e) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3 \cong \mathbb{R}/3 \cdot \mathbb{R} = 0$

(f) $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}[x]$

$$(\mathbb{Z}[x] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \cdot x^i)$$

(g) $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[x, y]$

(h) $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}[x]} \mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[x]$

6. Satz (Funktorialität)

Zu $f: M \rightarrow M'$ in Mod_R
und $g: N \rightarrow N'$ in Mod_R

existiert genau ein

$f \otimes g: M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$ in Mod_R
mit $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$.

Beweis:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} (m, n) \\ \downarrow \\ m \otimes n \end{array} & \begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f \times g} & M' \times N' \\ \text{can} \downarrow & \searrow \text{bilinear} & \downarrow \text{can} \\ M \otimes_R N & \xrightarrow{\quad} & M' \otimes_R N' \end{array} \\
 & & \begin{array}{c} (f(m), g(n)) \\ \downarrow \\ f(m) \otimes g(n) \end{array}
 \end{array}$$

Definiere diagonale Abb. als $\text{can} \circ (f \times g)$.

Diese ist R -bilinear, da $f \times g$ linear und can bilinear ist. Also erhalten wir $\xrightarrow{\quad}$. □

7. Notiz: Wir erhalten so Funktoren

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes_R - : \text{Mod}_R & \longrightarrow & \text{Mod}_R \\
 \begin{array}{c} N \\ g \downarrow \\ N' \end{array} & \begin{array}{c} \mapsto \\ \mapsto \end{array} & \begin{array}{c} M \otimes_R N \\ \downarrow \\ M \otimes_R N' \end{array} \quad \text{id}_M \otimes g
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 - \otimes_R N : \text{Mod}_R & \longrightarrow & \text{Mod}_R \\
 M & \mapsto & M \otimes_R N
 \end{array}$$

(und diese sind wegen Satz 4(c) natürlich isomorph). Sogar:

$$- \otimes_R - : \text{Mod}_R \times \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Mod}_R$$

(Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, so ist $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$

Kategorie mit

Objekten: Paare (X, Y) mit $X \in \text{ob } \mathcal{C}$, $Y \in \text{ob } \mathcal{D}$

Morphismen: $\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X, Y), (X', Y'))$
 $= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y').$

Jetzt: R nicht kommutativ.

z.B. $R = \text{Mat}_R(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$

z.B. $R = \mathbb{Z}[G]$ (G endliche Gruppe)

z.B. $R = \bigwedge_R(\mathbb{R}^2)$ (äußere Potenz;

Basis: $1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2$

$$e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2$$

$$e_1 \wedge e_1 = 0 = e_2 \wedge e_2$$

Müssen unterscheiden zwischen Mod_R : Rechts- R -Moduln
 ${}_R \text{Mod}$: Links- R -Moduln

für kommutatives R : $\otimes: \text{Mod}_R \times \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Mod}_R$
 $\parallel$ $r \downarrow \cong$ $u \downarrow$

für allgemeines R : $\hat{\otimes}: \text{Mod}_R \times {}_R \text{Mod} \longrightarrow \text{Ab}$

Verwandschaft von $\otimes$ und $\hat{\otimes}$ für kommutatives R :

Für kommutatives R haben wir Iso. von Kategorien

$$r: \text{Mod}_R \xrightarrow{\cong} {}_R \text{Mod}$$

$$M \mapsto {}_r M \text{ mit } a \cdot m := m \cdot a \text{ für } m \in M, a \in R$$

Sei $u: \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Ab}$ der Vergißfunkt. Wir

werden sehen:

$$u(M \otimes_R N) = M \hat{\otimes}_R r(N)$$

9. Def.: M Rechts- R -Modul

N Links- R -Modul

A abelsche Gruppe

Eine Abbildung $f: M \times N \longrightarrow A$ heißt

R -biadditiv falls sie additiv in beiden Komponenten ist (also

$$f(m+m', n) = f(m, n) + f(m', n)$$

$$f(m, n+n') = f(m, n) + f(m, n')$$

und ferner gilt:

$$f(m \cdot a, n) = f(m, a \cdot n)$$

für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $a \in R$.

10. Def.: M Rechts- R -Modul

N Links- R -Modul

Das Tensorprodukt von M und N ist eine

abelsche Gruppe $M \hat{\otimes}_R N$

zusammen mit einer R -biadditiven Abb.

$$M \times N \xrightarrow{\text{can}} M \hat{\otimes}_R N$$

mit folgender $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\text{can}} & M \hat{\otimes}_R N \\ & \searrow \text{ } & \swarrow \text{ } \\ & T & \end{array}$$

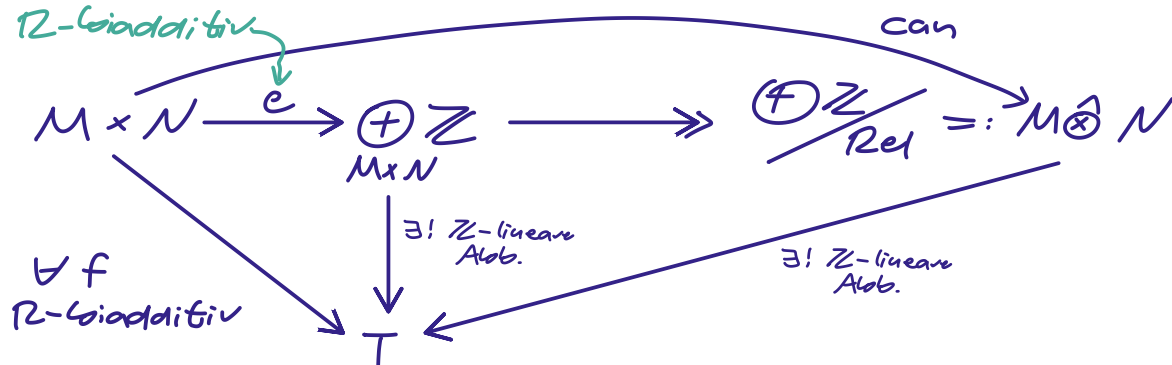
$\forall R$ -biadditive f $\exists! \mathbb{Z}$ -lineares $\tilde{f}$

Für jede R -biadditive Abb. $f: M \times N \rightarrow T$ existiert

genau eine $\mathbb{Z}$ -lineare Abb. $\tilde{f}: M \hat{\otimes}_R N \rightarrow T$ mit $\tilde{f} \circ \text{can} = f$.

Existenzbeweis: Ähnlich kommutativen Fall

nicht $\mathbb{Z}$ -biadditiv



mit Rel erzeugt von:

$$e(m + m', n) - e(m, n) - e(m', n)$$

$$e(m, n + n') - e(m, n) - e(m, n')$$

$$e(m \cdot a, n) - e(m, a \cdot n)$$

für $a \in R$



11. Satz (Funktorialität)

Zu $f: M \rightarrow M'$ in Mod_R

und $g: N \rightarrow N'$ in ${}_R \text{Mod}$

existiert genau ein Homomorphismus

$$f \hat{\otimes} g: M \otimes N \rightarrow M' \otimes N' \text{ in } \mathcal{A}b$$

mit $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$.



12. Satz: R, S Ringe

M S - R -Bimodul, also

- M ist Links- S -Modul
- M ist Rechts- R -Modul
- $(s \cdot m) \cdot r = s \cdot (m \cdot r) \quad \forall m \in M, r \in R, s \in S$

N Links- R -Modul

Es existiert genau eine Links- S -Modulstruktur auf $M \hat{\otimes}_R N$

mit $s \cdot (m \otimes n) = (s \cdot m) \otimes n \quad (\text{für } m \in M, n \in N, s \in S)$

Beweis:

Für $s \in S$ ist $l_s: M \rightarrow M$ Rechts- R -linear:
 $m \mapsto s \cdot m$

Nach Satz 12 existiert also genau ein Gruppenhomomorphismus $l_s \otimes \text{id}: M \hat{\otimes}_R N \rightarrow M \hat{\otimes}_R N$
mit $m \otimes n \mapsto s \cdot m \otimes n$.

Das definiert eine Links- S -Modulstruktur [...]. $\square$

13. Beispiel: $R \xrightarrow{f} S$ Ringhomomorphismus,
 N Links- R -Modul.

$S \hat{\otimes}_R N$ ist ein Links- S -Modul.

(Fasse S als S - R -Bimodul auf via $S \times S \times R \rightarrow S$
 $(s', s, r) \mapsto s' \cdot s \cdot f(r)$.)

Unterbeispiel: $\mathbb{R} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} A$ ist $\mathbb{R}$ -VR für jede abelsche Gruppe A ,

$$\begin{aligned} \text{z.B. } (\mathbb{R} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}^{\oplus 5} \oplus \mathbb{Z}/3)) &\cong (\mathbb{R} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})^{\oplus 5} \oplus (\mathbb{R} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3) \\ &\cong \mathbb{R}^{\oplus 5} \oplus \underbrace{(\mathbb{R} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3)}_{\cong \mathbb{R} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1} \end{aligned}$$

vgl. Bsp. 5(e)

14. Satz: R kommutativer Ring, M, N R -Moduln.

- (a) Es existiert genau eine R -Modulstruktur auf $M \hat{\otimes}_R N$ mit $(m \otimes n) \cdot r = m \otimes n \cdot r$ (für $m \in M, n \in N, r \in R$),
(b) $\hat{can}: M \times N \longrightarrow M \hat{\otimes}_R N$ ist R -bilinear, und
(c) $(M \hat{\otimes}_R N, \hat{can})$ ist ein Tensorprodukt von M und N in Mod_R .

15. Bemerkungen

(a) Wegen Satz 14 werden $\otimes$ und $\hat{\otimes}$ gewöhnlich nicht in Notation unterschieden.

(b) Es gilt dann:

$$\begin{aligned}(m \otimes n) \cdot r &= m \otimes (n \cdot r) \\ &= m \otimes (r \cdot n) \\ &= (m \cdot r) \otimes n \\ &= (r \cdot m) \otimes n \\ &= r \cdot (m \otimes n)\end{aligned}$$

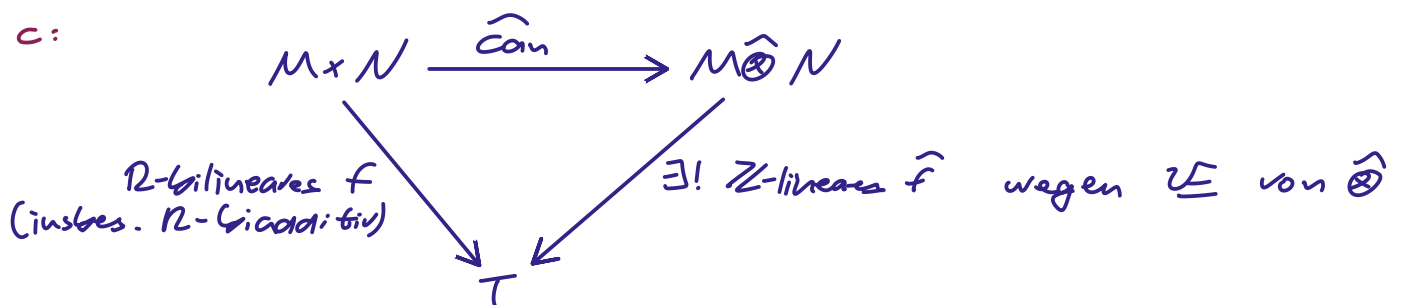
für alle $m \in M, n \in N, r \in R$.

Beweis zu Satz 14:

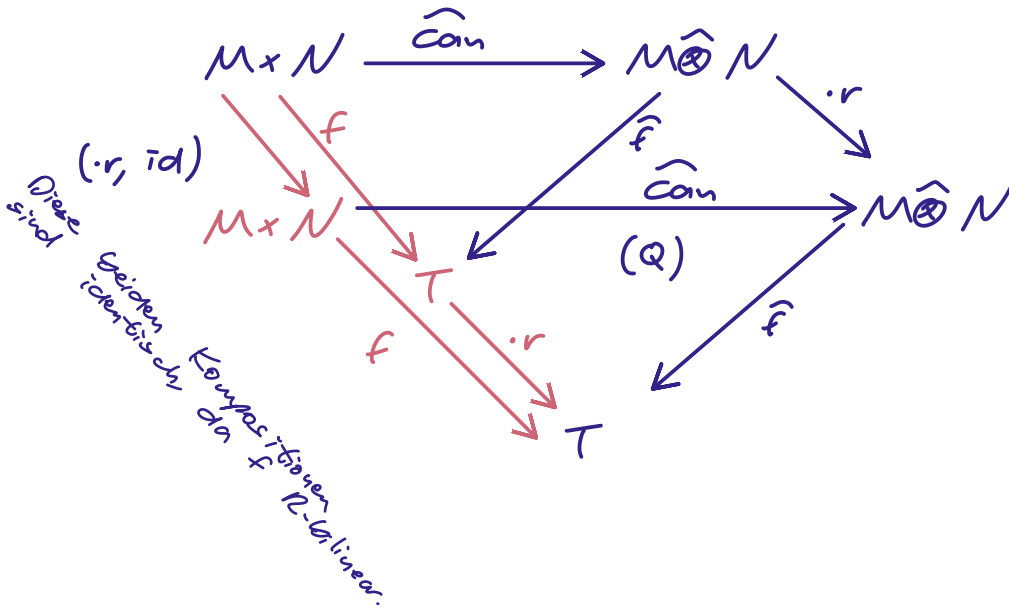
a: Satz 12, bis auf Rechts-Links-Schwäche.

b: [...]

c:



N.z.z.: $\hat{f}$ ist $\mathbb{R}$ -linear, d.h. Quadrab (Q) kommutiert:



Das Quadrat mit $\widehat{c\alpha n}$ kommutiert, da $\widehat{c\alpha n}$ $\mathbb{R}$ -linear.
 $v \in$ von $M \otimes N$, angewendet auf rote Komposition,
 zeigt nun: $\widehat{f} \cdot v = v \cdot \widehat{f}$

[Dieser Beweis benutzt nicht die konkrete Konstruktion von $\hat{\otimes}$.

Beweis für konkrete Konstruktion:

$M \hat{\otimes}_R N$ wird von reinen Tensoren $m \otimes n$ erzeugt. Also reicht es zu zeigen:

$$\begin{aligned}\widehat{f}((m \otimes u) \cdot r) &= \widehat{f}(m \otimes u \cdot r) \\ &= f(m, u \cdot r) \\ &= f(m, u) \cdot r \quad (\text{da } f \text{ } R\text{-bilinear}) \\ &= \widehat{f}(m \otimes u) \cdot r\end{aligned}$$

□ □