

M4: Kettenkomplexe

R ein Ring (nicht notwendig kommutativ)

Alle Moduln Rechts- R -Moduln.

1. Def.: Ein Kettenkomplex von R -Moduln ist eine Sequenz von R -Moduln & R -linearen Abbildungen

$$\cdots \rightarrow M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots$$

mit $d_i \circ d_{i+1} = 0$.

(Wir nennen d_i auch das "Differential" von M_i und schreiben die Bedingung kurz als " $d^2 = 0$ ".)

Ein Morphismus von Kettenkomplexen

$$f: (M, d^M) \longrightarrow (N, d^N)$$

ist eine Familie von Morphismen von R -Moduln $f_i: M_i \rightarrow N_i$ mit $d_i^N f_i = f_{i+1} d_i^M$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & M_{i+1} & \rightarrow & M_i & \rightarrow & M_{i-1} & \rightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{i+1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \\ \cdots & \rightarrow & N_{i+1} & \rightarrow & N_i & \rightarrow & N_{i-1} & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

Wir erhalten so eine Kategorie "
"Kom $_R$ " oder "Kom(Mod $_R$)"

Homologie

2. Def.: Die Homologiegruppen eines Komplexes sind gegeben durch

$$H_i(M, d) := \frac{\ker(d_i)}{\operatorname{im}(d_{i+1})}$$

$(H_i(M, d))$ ist ein R -Modul, also insbesondere eine „Gruppe“,
 Elemente von $\ker(d_i)$ heißen Zykel,
 „ „ „ $\operatorname{im}(d_{i+1})$ „ Ränder,
 „ „ „ $H_i(M, d)$ „ Homologieklassen

3. Satz: Für jedes i definiert H_i einen
 Funktor

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Kom}(\operatorname{Mod} R) & \xrightarrow{H_i} & \operatorname{Mod} R \\ (M, d) & \longmapsto & H_i(M, d) \\ f \downarrow & & \downarrow H_i(f) \\ (N, d) & \longmapsto & H_i(N, d) \end{array}$$

Beweis - Def. von $H_i(f)$:

$$\begin{aligned} f_i(\ker d_i^M) &\subseteq \ker d_i^N \\ f_i(\operatorname{im} d_{i+1}^M) &\subseteq \operatorname{im} d_{i+1}^N. \end{aligned}$$

Also erhalten wir insbesondere
 Abb.

$$\begin{array}{ccc} \ker(d_i^M) & \twoheadrightarrow & \frac{\ker(d_i^M)}{\operatorname{im}(d_{i+1}^M)} \\ f_i|_{\dots} \downarrow & & \downarrow f_i|_{\dots} =: H_i(f) \\ \ker(d_i^N) & \twoheadrightarrow & \frac{\ker(d_i^N)}{\operatorname{im}(d_{i+1}^N)} \end{array}$$

[...] $\square$

Lange exakte Homologiesequenz

4. Notiz: Offenbar ist ein Komplex (M, d) genau dann exakt, wenn $H_i(M, d) = 0 \quad \forall i$.

5. Def: Eine Sequenz von Kettenkomplexen und Kettenkomomorphismen

$$(M', d) \xrightarrow{f} (M, d) \xrightarrow{g} (M'', d)$$

ist exakt, falls

$$\dots M'_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M''_i$$

für jedes i eine exakte Sequenz von Modulen ist.

6. Satz: Für jede kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow (M', d) \xrightarrow{f} (M, d) \xrightarrow{g} (M'', d) \rightarrow 0$$

bilden die Homologiegruppen eine lange exakte Sequenz der Form

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{i+1}(M') &\xrightarrow{f_*} H_{i+1}(M) \xrightarrow{g_*} H_{i+1}(M'') \rightarrow \\ &\hookrightarrow H_i(M') \xrightarrow{f_*} H_i(M) \xrightarrow{g_*} H_i(M'') \rightarrow \\ &\hookrightarrow H_{i-1}(M') \xrightarrow{f_*} H_{i-1}(M) \xrightarrow{g_*} H_{i-1}(M'') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

(Hier f_*, g_* für die Abb. $H_*(f), H_*(g)$.)

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ist } 0 \rightarrow (M^! d) & \rightarrow & (M, d) & \rightarrow & (M'', d) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow (N^! d) & \rightarrow & (N, d) & \rightarrow & (N'', d) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

eine kurze kommutative Reihe so bilden die langen exakten Homologieketten eine lange exakte Reihe.

Beweis:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow M_{i+1}^! & \xrightarrow{f_i} & M_{i+1} & \xrightarrow{g_i} & M_{i+1}'' & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow d & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ 0 \xrightarrow{\partial_i} M_i^! & \xrightarrow{f_i} & M_i & \xrightarrow{g_i} & M_i'' & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow d & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ 0 \xrightarrow{\partial_i} M_{i-1}^! & \xrightarrow{f_{i-1}} & M_{i-1} & \xrightarrow{g_{i-1}} & M_{i-1}'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Def. von ∂ : $H_i(M'') \rightarrow H_{i-1}(M')$.

Sei $[u''] \in H_i(M'')$, also $u'' \in M_i''$ mit $du'' = 0$.

Da g_i surj:

$$\exists u \in M_i \text{ mit } g_i u = u'' \quad (1)$$

Dann ist $g_{i-1}(du) = dg_i u = du'' = 0$, also

$$\exists u' \in M_{i-1} \text{ mit } f_{i-1} u' = du \quad (2)$$

$$\text{Ferner ist } du' = 0 \text{ denn } f_{i-2}(du') = df_{i-1}(u') = d(du) = 0$$

und f ist injektiv.

Also $[u'] \in H_{i-1}(M')$.

Def. $\partial [u''] := [u']$.

∂ wohldef.:

$$\text{Sei } \tilde{u} \in M_i \text{ weiteres Element mit } g_i \tilde{u} = u'' \quad (1)$$

$$\text{Sei } \tilde{u}' \in M_{i-1} \text{ sodass } f_{i-1} \tilde{u}' = d\tilde{u} \quad (2)$$

wegen (1) ist $g_i(u - \tilde{u}) = 0$ also
 $\exists u' \in U_i'$ mit $f_i(u') = u - \tilde{u}$,
 und $f_{i-1}(du) = df_i(u') = du - d\tilde{u}$
 $= f_{i-1}(u' - \tilde{u}')$
 (2)

Da f injektiv, folgt
 $u' - \tilde{u}' = du$,

also $[u'] = [\tilde{u}']$.

Exaktheit ($\xrightarrow{f_i} \xrightarrow{f_{i+1}}$):

Ist $[u] \in H_i(M)$ mit $[g_i u] = 0$, so
 $\exists u'' \in U_{i+1}''$ mit $g_i u = du''$.

g surj:
 $\exists \hat{u} \in U_{i+1}$ mit $g_{i+1} \hat{u} = u''$

Dann
 $g_i(u - d\hat{u}) = g_i(u) - dg_{i+1}(\hat{u})$
 $= du'' - du'' = 0$,

also
 $\exists u' \in U_i'$ mit $f_i u' = u - d\hat{u}$

Deriv $du' = 0$, denn $f_{i-1} du' = df_i u' \stackrel{0}{=} du - d d\hat{u} = 0$, da $d \circ d = 0$ und f_{i-1} ist injektiv.
 nach Annahme $[u] \in H_i(M)$

Also $[u'] \in H_i(U')$ mit $[f_i u'] = [u - d\hat{u}] = [u]$.

Exaktheit ($\xrightarrow{g_i} \xrightarrow{g_{i+1}}$)

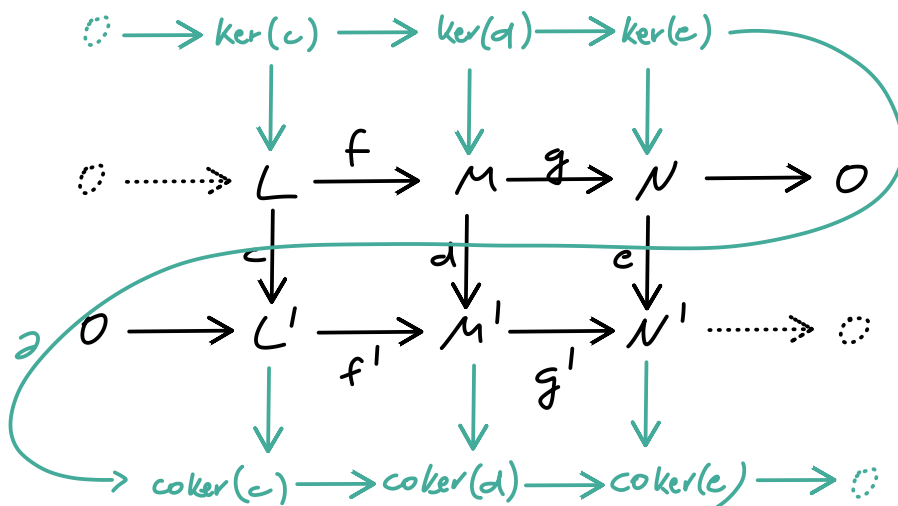
Exaktheit ($\xrightarrow{f_i} \xrightarrow{f_{i+1}}$)

Natürlichkeit von d



6. Korollar: Schlangenlemma

Sei ein kommutatives Diagramm in Mod_R mit exakten Zeilen wie folgt mit schwarzen durchgezogenen Pfeilen dargestellt gegeben:



Dann existiert ein Morphismus α in Mod_R derart, dass die in **türkis** eingezeichnete Sequenz exakt ist. Ist eine der durch einen der gestrichelten schwarzen Pfeile erweiterte Zeile exakt, ist auch die durch den darüber/darunterliegenden gestrichelten türkisfarbenen Pfeil erweiterte Sequenz exakt.

Beweis:

Sind beiden Zeilen inklusive $\cdots \twoheadrightarrow$ exakt, können wir das schwarze Diagramm als k.e.s. von Komplexen auffassen, und Korollar ergibt sich direkt aus langer exakter Homologiesequenz.

Im Allgemeinen müssen wir zunächst L ersetzen durch $L/\ker f$ und N' durch $\text{im}(g)$. [...]

□

7. Beispiel: Das Fünfer-Lemma (M1, Satz 10) ist ein Spezialfall des Schlangenlemmas.

10. Satz: Fünfer-Lemma

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Seien} & 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & \cong f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow \cong & & \\ & 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

zwei kurze exakte Sequenzen in Mod_R , und f, g, h Morphismen in Mod_R derart, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Sind f und h Isomorphismen, so ist auch g ein Isomorphismus.

Beweis:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker f & \longrightarrow & \ker g & \longrightarrow & \ker h \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\ & & \cong f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{coker } f & \longrightarrow & \text{coker } g & \longrightarrow & \text{coker } h \longrightarrow 0 \end{array}$$

Da f und h Isos: $\ker f = 0$ und $\ker h = 0$ und
 $\text{coker } f = 0$ und $\text{coker } h = 0$

Also hat die Sequenz die Form:

$$0 \longrightarrow \underbrace{0 \longrightarrow \ker g}_{\ker g = 0} \longrightarrow \underbrace{0 \longrightarrow \text{coker } g}_{\text{coker } g = 0} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Also ist g Monomorphismus und Epimorphismus,
 also — da Mod_R ausgewogen — ein Isomorphismus. $\square$

9. Def.: Eine Kettenhomotopie zwischen zwei Morphismen von Komplexen

$$(M_\bullet, d_\bullet^M) \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} (N_\bullet, d_\bullet^N)$$

ist eine Familie von Morphismen

$$\eta_i : M_i \longrightarrow N_{i+1} \quad \text{in } \text{Mod}_R$$

mit

$$d_{i+1}^N \eta_i + \eta_{i-1} d_i^M = f_i - g_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & M_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}^M} & M_i & \xrightarrow{d_i^M} & M_{i-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & \nearrow \eta_i & \downarrow f_i \quad \downarrow g_i & \nearrow \eta_{i-1} & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & N_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}^N} & N_i & \xrightarrow{d_i^N} & N_{i-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Zwei Morphismen von Kettenkomplexen f und g sind **homotop**, geschrieben $f \simeq g$, wenn es eine Kettenhomotopie zwischen ihnen gibt.

Zwei Kettenkomplexe $(M_\bullet, d_\bullet^M)$ und $(N_\bullet, d_\bullet^N)$ sind **homotopieäquivalent**, falls es Morphismen

$$(M_\bullet, d_\bullet^M) \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{matrix} (N_\bullet, d_\bullet^N)$$

gibt mit $f \circ g \simeq \text{id}$ und $g \circ f \simeq \text{id}$. Die Morphismen f und g nennen wir in diesem Fall **Homotopieäquivalenzen**.

9. Beispiel:

Der Komplex $M_\bullet := \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$

ist homotopieäquivalent zum Nullkomplex $0_\bullet$.

(Wähle $M_\bullet \xrightleftharpoons[g=0]{f=0} 0_\bullet$; $f \circ g = \text{id}_{0_\bullet}$; $g \circ f = 0 \simeq \text{id}_{M_\bullet}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\ & & \swarrow 0 & & \downarrow \text{id} & & \downarrow 0 \\ & & & & 0 & & \\ & & \swarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow 0 \\ \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \end{array}$$

10. Notiz:

(a) Homotopie zwischen Kettenmorphismen ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Homotopie ist mit Komposition verträglich:

Ist $f_1 \simeq g_1$ und $f_2 \simeq g_2$, so auch $f_1 \circ f_2 \simeq g_1 \circ g_2$.

Wir erhalten so eine **Homotopiekategorie** $\text{Ho}(\text{Kom}_R)$ mit Objekten: Kettenkomplexe

Morphismen: Homotopieklassen von Kettenmorphismen

11. Satz: $f \simeq g \Rightarrow H_i(f) = H_i(g) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

Beweis:

Seien $f, g: (M_\bullet, d) \Rightarrow (N_\bullet, d)$ und eine Homotopie η von f nach g gegeben, also $f_i = g_i + d_{i+1}\eta_i + \eta_{i-1}d_i$.

Für $[m] \in H_i(M_\bullet, d)$ ist $H_i(f)$ gegeben durch:

$$H_i(f)[m] = [f_i(m)]$$

$$= [g_i(m) + d_{i+1}\eta_i(m) + \eta_{i-1}d_i(m)]$$

$$= [g_i(m)] + [d_{i+1}\eta_i(m)]$$

$= 0$
in $H_i(N_\bullet, d)$,
da im Bild d

$= 0$, denn
 m repräsentiert
eine Homologie-
klasse

□

12. Def.: Ein **Quasiisomorphismus** ist ein Morphismus von Kettenkomplexen f derart, dass $H_i(f)$ für jedes i ein Isomorphismus ist.

13. Korollar: Homotopieäquivalenzen sind Quasiisomorphismen.

Beweis: Sei f, g ein Paar von Homotopieäquivalenzen,

also $f \circ g \simeq \text{id}$ und $g \circ f \simeq \text{id}$. Dann folgt aus Satz 11:

$$\underbrace{H_i(f \circ g)}_{H_i f \circ H_i g} = \text{id} \quad \text{und} \quad \underbrace{H_i(g \circ f)}_{H_i g \circ H_i f} = \text{id} \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

$$H_i f \circ H_i g$$

$$H_i g \circ H_i f$$



Die Umkehrung gilt nicht!

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{z.B.: } \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}/2 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow \dots \end{array}$$

ist ein Quasiisomorphismus, aber keine Homotopieäquivalenz. (In umgekehrte Richtung existiert nur die Nullabbildung. Diese ist hier kein Quasiisomorphismus, also nicht Teil einer Homotopieäquivalenz.)



Die Existenz eines Quasisos $M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ garantiert nicht die Existenz eines

Quasisos $M_\bullet \leftarrow N_\bullet$.

(siehe f oben)

13. Def. & Satz.: Das Tensorprodukt zweier Kettenkomplexe
 $(M_*, d_*) \in \text{ob Kom}(\text{Mod}_R)$ und
 $(N_*, d_*) \in \text{ob Kom}(R\text{Mod})$ ist der
 Kettenkomplex

$(M_*, d_*) \otimes_R (N_*, d_*) \in \text{ob Kom}(\text{Ab})$, der
 in Grad i gegeben ist durch

$$[(M_*, d_*) \otimes_R (N_*, d_*)]_i := \bigoplus_{\substack{a, b: \\ a+b=i}} M_a \otimes_R N_b,$$

mit Differential d_i das eindeutige Differential,
 für das für $m \in M_a$ und $n \in N_b$ gilt:

$$d_i(\underbrace{m \otimes n}_{i \text{ Grad}}) := \underbrace{d_{a-1} m \otimes n}_{i-1 \text{ Grad}} + (-1)^a \underbrace{m \otimes d_{b-1} n}_{i-1 \text{ Grad}}$$

Das ist wirklich ein Differential, also $d \circ d = 0$.

Sei $\mathbb{I}$ der folgende Kettenkomplex:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \xrightarrow[\text{Grad 1}]{\text{Grad 0}} & R \xrightarrow[\text{Basis 1}]{\text{Basis } (1, -1)} R \oplus R \xrightarrow[\text{Basis } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]{} 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \end{array}$$

14. Def (Alternative zu Def. 8):

Eine Homotopie zwischen Kettenmorphisamen

$f, g: M_* \Rightarrow N_*$ ist eine Kettenmorphisamen

$$H: M \otimes_R \mathbb{I} \longrightarrow N$$

mit $H(m \otimes (1)) = f(m)$

und $H(m \otimes (0)) = g(m)$.

15. Satz: Die beiden Definitionen (8 & 14) sind äquivalent.

Beweisskizze:

Ist γ wie in Def. 8 gegeben ist, definiere H für $m \in M_i$ durch

$$H_i(m \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = f(m)$$

$$H_i(m \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = g(m)$$

$$H_{i+1}(m \oplus 1) = (-1)^i \gamma_i(m) \quad [\dots]$$

