

M5: Projektive, injektive & flache Moduln

1. Satz 2.: Für jede abelsche Kategorie sind

$$\text{Hom}_A(X, -): A \longrightarrow Ab$$

und $\text{Hom}_A(-, X): A^{\text{op}} \rightarrow Ab$ linksexakt.

Allgemeinen Beweis zu $\text{Hom}_R(-, X)$:

gegeben: $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ exakt in $\mathcal{A}^{\text{op}}$,

also $0 \leftarrow A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ exakt in $\mathcal{A}$.

Zu zeigen:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(A, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_A(B, X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_A(C, X) \text{ exakt in } Ab.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & & \mathbb{U} \\ a & \mapsto & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & & \mathbb{U} \\ b & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

$a = 0$,
denn $f' \in \mathcal{E}_{p_i}$

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

→ existiert, da
f ein Kokern von g.

Allgemeinen Beweis zu $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$: analog

Kurzbeweis zu $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ für $\mathcal{A} = \text{Mod}_R$:

$$A \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_R M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_R(M, -)} \end{array} \text{Mod}_R \quad (K6, \text{Bsp. 3(a)})$$

und Rechtsadjungierte sind linksseitig (K7, Satz 16).





Im Allgemeinen nicht exakt, z.B. ($A = A_6$):

$$\begin{array}{lcl} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}) & 0 \leftarrow \cancel{\mathbb{Z}} \xleftarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, -) & 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0 \\ & 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \cancel{0} \end{array}$$

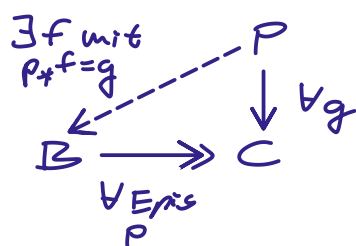
2. Def.: $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie

Ein Objekt P in $\mathcal{A}$ ist **projektiv**, falls $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ exakt ist.

Ein Objekt I in $\mathcal{A}$ ist **injektiv**, falls $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I)$ exakt ist.

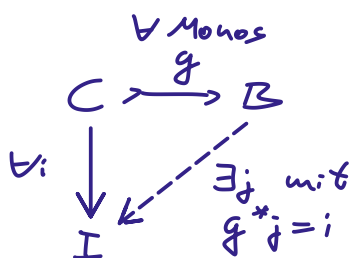
3. **Notiz:** P ist projektiv g.d.w. gilt:

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, C)$ surjektiv $\forall \text{Epis } B \twoheadrightarrow C$.



I ist injektiv g.d.w. gilt:

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, I)$ surjektiv $\forall \text{Monos } B \hookrightarrow C$



4. Satz (projektive Moduln)

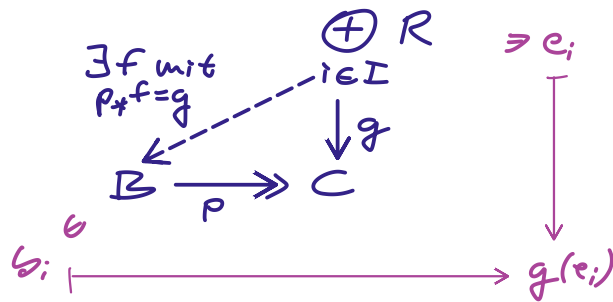
Ein Rechts- R -Modul P ist genau dann projektiv, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist (d.h.: wenn es R -Modul Q und freien R -Modul F gibt mit $F \cong P \oplus Q$).

Inbesondere sind freie Moduln projektiv.*

(* Das hatten wir ohne diese Sprache bereits gesehen und gezeigt in MZ, Satz 6.)

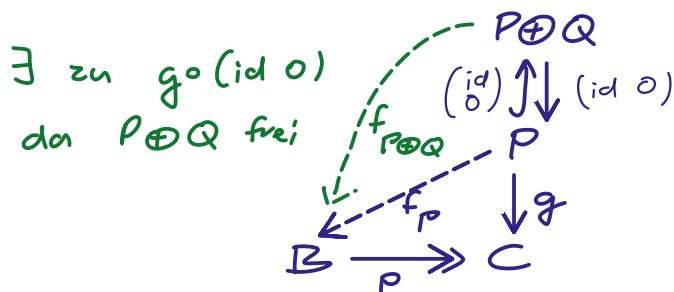
Beweis:

($\Leftarrow$) Falls $P = \bigoplus_{i \in I} R$ frei:



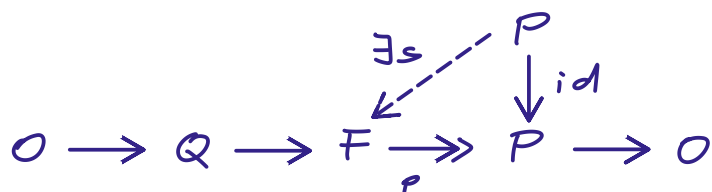
Wähle für jedes Basis-element e_i von P ein Urbild b_i von $g(e_i)$ unter ρ . Definiere f durch $f(e_i) := b_i$.

Falls allgemeinen $P \oplus Q$, betrachte:



Definiere $f_P := f_{P \oplus Q} \circ \begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}$. [...]

($\Rightarrow$) Wähle $F \xrightarrow{\rho} P$ mit F frei und betrachte:



Da P projektiv, $\exists s$, d.h. Sequenz spaltet;
insbesondere $F \cong P \oplus Q$.

□

5. Korollar (proj. Moduln über HIR)

Für Moduln M über einem HIR gilt:

$$M \text{ projektiv} \Leftrightarrow M \text{ frei}$$

Beweis:

($\Leftarrow$) Satz 4

($\Rightarrow$) Satz 4 + $\left[\begin{array}{c} \text{Untermoduln freier Moduln über HIR} \\ \text{sind frei} \end{array} \right]$

endl. erzeugter Fall: MZ, Satz 9

allgemein: Rotman, Corollary 4.19



6. Satz (injektive Moduln; Baersches Kriterium)

Für Rechts- R -Moduln I gilt:

$$I \text{ injektiv} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ Rechtsideale } J \hookrightarrow R: \\ \begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\quad} & R \\ \downarrow \iota_i & \swarrow \exists j & \\ I & & \end{array} \end{array} \right.$$

□

7. Korollar (injektive Moduln über HIR):

Für einen Modul I über einem HIR R gilt:

$$I \text{ injektiv} \Leftrightarrow I \text{ divisibel}$$

(d.h. $I \xrightarrow{r} I$ ist surjektiv $\forall r \in R \setminus \{0\}$)

Beweis:

Da R HIR, ist $R \xrightarrow{r} R$ injektiv für jedes $r \in R \setminus \{0\}$,
und jedes Ideal $J \hookrightarrow R$ ist von dieser Form.

Nach Baerschem Kriterium gilt also:

I injektiv

$$\Leftrightarrow \underbrace{\text{Hom}_R(R, I)}_{\cong I} \xrightarrow{(r \cdot)^*} \underbrace{\text{Hom}_R(R, I)}_{\cong I} \quad \text{surjektiv } \forall r \neq 0$$

$$I \xrightarrow{\cdot r} I$$

□

8. Beispiele:

injektiv/ $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, S^1$

nicht injektiv/ $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/m$ für $m \neq 1$

Satz: Für $M \in \text{ob}_R \text{Mod}$ ist

$$-\otimes_R M : \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Ab} \quad \text{rechtsseitig.}$$

Beweis:

$$\text{Mod}_R \xrightleftharpoons[\text{Hom}_Z(M, -)]{-\otimes_R M} AB \quad (K6, \text{Bsp. 3(a)})$$

und Linksadjungierte sind rechtserhalt (K7, Satz 16).

(Alternativ siehe Blatt 8, Aufgabe 2.)

⚠️ Aber das Tensorprodukt ist i. A. nicht exakt,
z.B. $(\mathbb{R} = \mathbb{Z})$:

$$\begin{array}{l} \text{---} \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \text{---} \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0 \\ \text{---} \times \text{---} \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0 \end{array}$$

10. Def.: M aus ${}_R \text{Mod}$ ist flach, falls $- \otimes_R M$ exakt.
 M aus Mod_R ist flach, falls $M \otimes_R -$ exakt.

11. **Notiz:** M aus $R\text{-Mod}$ ist genau dann flach, wenn gilt:

$A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M$ ist Mono für alle Monos

$$A \rightarrow B.$$

12. Bsp.

(a) Jeder freie Modul ist flach (da $- \otimes_R R \cong \text{Id}$ und $\otimes$ mit $\oplus$ verträglich)

(b) Ist R HIR, $x \in R \setminus (R^+ \cup \{0\})$, so ist $\frac{R}{x}$ nicht flach:

$0 \rightarrow R \xrightarrow{\cdot x} R \rightarrow R_x \rightarrow 0$ ist exakt
 (da x kein Nullteiler),
 $- \otimes_R R_x$
 $0 \rightarrow R_x \xrightarrow{0} R_x \rightarrow R_x \rightarrow 0$ nicht

13. Satz (flache Moduln über HIR)

Für einen Modul M über einem HIR gilt:

M ist flach $\Leftrightarrow M$ ist torsionsfrei.

Halber Beweis:

Ist M endlich erzeugt, folgt dies aus Bsp. 12.

Allgemeiner Fall: Weibel § 3.1 (+ Ex. 3.2.3).



14. Zusammenfassung für $A = \mathbb{A}$

frei,
projektive

$\mathbb{Z}^{\oplus n}$

$\mathbb{Z}/n$

divisibel,
injektiv

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$\mathbb{R}$

S^1

torsionsfrei,
flach



