

Korrekturen & Nachträge

[im veröffentlichten Skript bereits korrigiert bzw. ergänzt]

K4, Universelle Eigenschaften

10a. Beispiel

Der (kategorielle) Kern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\ker(f)}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $\underline{\ker(f)} \xrightarrow{i} M$ derart, dass $f \circ i = 0$ und die folgende $\mathcal{U}$ erfüllt ist:

$$\begin{array}{ccccc} & T & & & \\ & \swarrow \exists! \hat{g} & \searrow \forall g & \searrow 0 & \\ \underline{\ker(f)} & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

10b. Beispiel

Der (kategorielle) Kokern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\text{coker } f}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $N \xrightarrow{p} \underline{\text{coker } f}$ derart, dass $p \circ f = 0$ und die folgende $\mathcal{U}$ erfüllt ist:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{p} & \underline{\text{coker } f} \\ & \searrow 0 & \searrow \forall g & \swarrow \exists! \hat{g} & \\ & & T & & \end{array}$$

K5, Limiten & Kolimiten

Bsp. 12 (e)

Ein Kern von $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Limes von $M \xrightarrow{f} N$ (vgl. K4, Bsp. 10a).

Bsp. 14 (e)

Ein Kokern von $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Kolimes von $M \xrightarrow{f} N$ (vgl. K4, Bsp. 10b).

K6, Adjunktionen

Beispiel 3 (a)

R kommutativer Ring, $M \in \text{ob Mod}_R$

$$\text{Adjunktion} \quad \text{Mod}_R \xrightleftharpoons[\text{Hom}_R(M, -)]{- \otimes_R M} \text{Mod}_R$$

allgemeiner, für beliebigen Ring R :

$M \in \text{ob}_R \text{Mod}$ liefert Adjunktion $\text{Mod}_R \xrightleftharpoons[\text{Hom}_Z(M, -)]{- \otimes_R M} \text{Ab}$

$\text{Hom}_Z(M, A)$ ist Rechts- R -Modul via
 $(f \cdot r)(m) := f(r \cdot m)$ für $r \in R, m \in M, f: M \rightarrow A$

$A \otimes_Z M$ ist Rechts- R -Modul:
M3, Satz 12

$M \in \text{ob Mod}_R$ liefert Adjunktion $\text{Ab} \xrightleftharpoons[\text{Hom}_R(M, -)]{- \otimes_Z M} \text{Mod}_R$

K7 Abelsche Kategorien

4. Def.: Kern und Kokern eines Morphismus $f: X \rightarrow Y$

lassen sich in jeder additiven Kategorie genauso wie in Mod_R definieren als Limes bzw.

Kolimes von $X \xrightarrow[f]{\quad} Y$

- vgl. K4, Bsp. 10 & K5, Bsp. 12 (c) & 14 (c)).

14. Übung: F linksexakt $\Leftrightarrow F$ erhält Kerne

F rechtsexakt $\Leftrightarrow F$ erhält Kokerne

16. Satz:

Rechtsadjungierte additive Funktoren sind links-exakt.

Linksadjungierte additive Funktoren sind rechts-exakt.

Beweis: Übung 14 & RAPL (K6, Satz 12). $\square$

M5 Projektive, injektive & flache Moduln

1. Satz.: Für jede abelsche Kategorie sind

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} &\longrightarrow \text{Ab} \\ \text{und } \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X) : \mathcal{A}^{\text{op}} &\longrightarrow \text{Ab} \quad \text{links-exakt.} \end{aligned}$$

Kurzbeweis zu $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ für $\mathcal{A} = \text{Mod}_R$:

$$\text{Ab} \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_{\mathbb{Z}} M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_R(M, -)} \end{array} \text{Mod}_R \quad (\text{K6, Bsp. 3(d)})$$

und Rechtsadjungierte sind links-exakt (K7, Satz 16). $\square$