$t \in K[t]$ $\quad$ K Körper

hat kein multiplikatives Inverses

Ang. $\exists f \in K[t]$ mit

$$f \cdot t = 1 \quad \Big| \deg$$

Dann ist $f \neq 0$ und

$$\deg(f) + \deg(t) = \deg(1)$$

$$\underbrace{\deg(f)}_{\geq 0} + 1 = 0 \qquad ↯$$

//

$\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \ni [3]$

$\not\ni \cancel{\left[\tfrac{1}{3}\right]}$

Dennoch $[4] \cdot [3] = [1]$

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ +,\ \cdot)$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\cdot y_1\\x_2\cdot y_2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix}0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ 1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\end{matrix}}\quad , \quad -\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot y_1\\1\cdot y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

also $$\begin{pmatrix}x_1\cdot 1\\x_2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

also $$\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\lightning$

$\longrightarrow$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ hat kein Inverses!

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$$

$a = 4, \quad K = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto 4 \cdot x \\ (\, 2 &\longmapsto 8 \,) \end{aligned}$$

$K = \mathbb{R}$

$a = \sqrt{1}$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 1 \\ a &= -1 \end{aligned}}$$

Die Abbildung $K \to K$ mit $x \mapsto a \cdot x$ heiße f. Es gibt dann eine Abbildung $g : K \to K$ mit $x \mapsto a^{-1} \cdot x$. Dann ist $g \circ f = id_K$, denn $a^{-1} \cdot (a \cdot x) = x$. Gleichermaßen ist $f \circ g = id_K$, denn $a \cdot (a^{-1} \cdot x) = x$. Damit ist f bijektiv.

$1 + t$

$\in \mathbb{C}$

$\in \mathbb{R}$

$\in \mathbb{C}[t]$

$\cup$

$\in \mathbb{R}[t]$

$$[5]^2 + [5] = [-1]^2 + [-1]$$
$$= [(-1)^2] + [-1]$$
$$= [1] + [-1]$$
$$= 0$$

$$[2]^2 + [2] = [4] + [2] = [6] = 0 \checkmark$$

$$[3]^2 + [3] = [9] + [3] = [12] = 0 \checkmark$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \\ 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

(a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

in $\mathbb{R}^3$

(b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ Basis

(c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ Erzeugenden-system

(d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ″

(e) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ Kein Erzeugenden-system

(f) $(\underline{v})_{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}}$ Erzeugenden-systen

$\underline{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

-2

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Basis von } W: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}}$$

andere Basis von W: $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

andere Basis von W: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$W = \mathbb{R}^3$

andere Basis von W: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.