

$V$  VR  $U, W \subset V$  UVR

(a)  $U + W = U \cup W$

(b)  $U + W = \text{span}(U \cup W)$  DEF ✓

(c)  $U + W = \text{span}(U + W)$  ✓

(d)  $U + W$  DEF ✓

$$= \left\{ v \in V \mid \exists k, l \in \mathbb{N}, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k \in U, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_l \in W, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K, \mu_1, \dots, \mu_l \in K : \right.$$

$$\left. \underline{v} = \underbrace{\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{u}_i}_{\underline{u}} + \underbrace{\sum_{j=1}^l \mu_j \underline{w}_j}_{\underline{w}} \right\}$$

(e)  $U + W$

$$= \left\{ \underline{v} \in V \mid \exists \underline{u} \in U, \underline{w} \in W : \right.$$

$$\left. \underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \right\}$$

Welche Aussagen gelten allgemein?

$$U_1, U_2, U_3 \subset V$$

(a)  $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$  ✓

(b)  $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$  ✗

(c)  $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$  ✗

$$V \xrightarrow{F} W \quad \text{lineare Abb.}$$

Ker F = (a)  $\{\underline{w} \in W \mid F(\underline{o}) = \underline{w}\}$  ✗

(b)  $\{\underline{v} \in V \mid F(\underline{v}) = \underline{o}\}$  ✓

(c)  $\{F(\underline{v}) \mid \underline{v} = \underline{o}\}$  ✗  
 $= \{\underline{o}\}$

(d) Für jede lineare Abb.  $V \xrightarrow{F} W$   
ist  $\text{Ker } F \subset V$  UVR. ✓

(e) Jeder UVR von V ist der  
Kern einer linearen Abb. ✓

(F<sub>4</sub>) jeden UVR  $U \subset V$   
 existiert – ein VR  $W$  und  
 – eine lineare Abb.  
 $F: V \rightarrow W$   
 sodass gilt:  $\text{Ker } F = U.$ )

Eine lineare Abb.  $F: V \rightarrow W$   
 ist genau dann injektiv wenn  
 gilt:

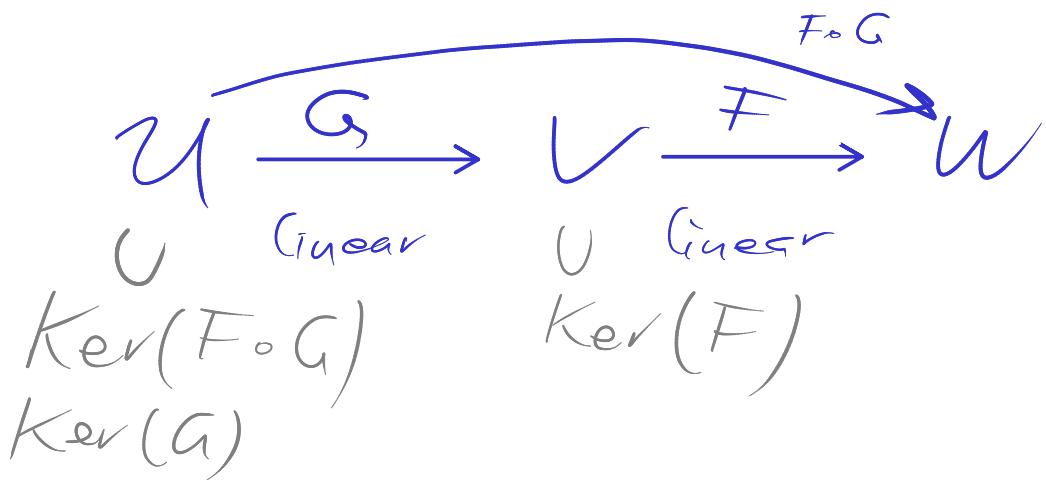
- (a)  $F(\underline{0}) = \underline{0}$   $\times \mathbb{R}^5 \rightarrow \{\underline{0}\}$
- (b)  $F'(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$  ✓
- (c)  $F'(\underline{w}) = \{\underline{0}\}$   $\nexists \underline{w} \in W$   
 $\times \mathbb{R}^5 \rightarrow \{\underline{0}\}$
- (d)  $\text{Ker } F = \{\underline{0}\}$  ✓
- (e)  $\text{Ker } F = \emptyset$  kein VR  $\times$
- (f)  $\dim(\text{Ker } F) = 0$  ✓

✓ VR

$$V = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow \dim V = 0$$

$\Rightarrow \emptyset$  ist Basis  
 von  $\{\underline{0}\}$

$\Leftarrow$  Kontraposition  
 Basisergänzungssatz



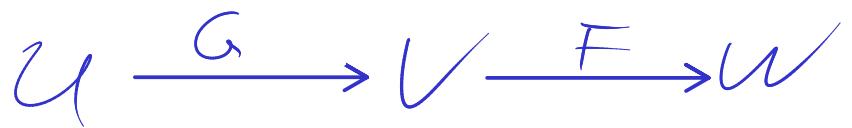
- (a)  $\text{Ker}(F \circ G) = \text{Ker } G$  X  
 (b)  $\text{Ker}(F \circ G) \supset \text{Ker } G$  ✓  
 (c)  $\text{Ker}(F \circ G) \subset \text{Ker } G$  X  
 (d)  $\text{Ker}(F \circ G) = \text{Ker } F$  X

$\text{Ker}(F \circ G) = \text{Ker } G$ , falls

- (a)  $F$  injektiv ✓  
 (b)  $F$  surjektiv X  
 (c)  $F$  bijektiv ✓

$$R \xrightarrow{\text{Id}} R \xrightarrow{\sigma} R^\circ$$

- (a)  $F$  injektiv  $\Rightarrow$   $\text{Ker}(F \circ G) = \text{Ker}(G)$   
 (b)  $F$  surjektiv  $\cancel{\Rightarrow}$   $\text{Ker}(F \circ G) = \text{Ker}(G)$   
 (c)  $F$  bijektiv  $\Rightarrow$   $\text{Ker}(F \circ G) = \text{Ker}(G)$



- (a)  $\text{Im}(F \circ G) = \text{Im } G$ . X

(b)  $\text{Im}(F \circ G) \supset \text{Im } F$ . X

(c)  $\text{Im}(F \circ G) \subset \text{Im } F$  ✓

(d)  $\text{Im}(F \circ G) = \text{Im } F$  X

↓ ↑

$\{ F(G(y)) \}$  ↑  $\{ F(\subseteq) \}$

(a)  ~~$G$~~  injektiv  $\Rightarrow \text{Im}(F \circ G) = \text{Im } F$

(b)  $\checkmark G$  surjektiv  $\Rightarrow \text{Im}(F \circ G) = \text{Im } F$

(c)  $\checkmark G$  bijektiv  $\Rightarrow \text{Im}(F \circ G) = \text{Im } F$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

(a)  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 2e & f \\ g & h & 3i \end{pmatrix}$  X

(b)  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$  ✓

(c)  $\begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{pmatrix}$  X