a:
$$\det(A+B)$$
$$= \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \det\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2+b_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & a_2+b_2 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2+b_2 \end{pmatrix} + \boxed{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_2+b_2 \end{pmatrix}}$$
$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$+ \det\begin{pmatrix} b_1 & a_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1, & b_2 \end{pmatrix}$$
$$= \det(A) + \ldots + \ldots + \det(B)$$

c:
$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

d/f:
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$
$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \ldots & \lambda a_n \end{pmatrix}$$

(a) $0$

(b) $1$

(c) $-1$

(d) $(-1)^n$

(e) $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$

(f) $n$

(g) $\det \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & 1 & & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto [n]$$

Ringhomomorphismus

$$[1\cdot 1 - 19\cdot 28] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$
$$\| $$
$$[1]\cdot[1] - [19]\cdot[28]$$
$$\| $$
$$[1]\cdot[1] - [1]\cdot[1]$$
$$\| $$
$$0$$

$M(n\times n; \mathbb{Z}) \subset M(n\times n; \mathbb{Q})$

$\subset M(n\times n; \mathbb{R})$

kein Körper, nur kommutativer Ring mit Eins

Leibnizformel

Für $A \in M(n\times n; \mathbb{Z})$ gilt:

(a) $\det(A) \in \{1, 0, -1\}$ ✗

(b) $\det(A) \in \mathbb{Z}$, aber i. A. $\det(A) \notin \{1, 0, -1\}$ ✓

(c) $\det(A) \in \mathbb{Q}$ aber i. A. $\det(A) \notin \mathbb{Z}$ ✗

Falls $A$ invertierbar in $M(n\times n; \mathbb{Z})$, gilt:

$\left(\exists B \in M(n\times n; \mathbb{Z}) : A \cdot B = B \cdot A = E_n\right)$

(d) $\det(A) \in \{\pm 1\}$ ✓

(e) $\det(A) \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, aber i. A. $\det(A) \notin \{\pm 1\}$ ✗

Erinnerung:

Matrizen äquivalent $\Longleftrightarrow$ Rang gleich

Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante.

Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d$$

Möglich bleibt:

B ist ähnlich zu C

Das ist tatsächlich so:

$$(*):\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{T}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$