# Gruppen

**Def (2.2.1):** Eine *Verknüpfung* auf einer Menge $X$ ist eine Abbildung

$$* : X \times X \longrightarrow X$$
$$(a, b) \longmapsto a * b$$

**Def (2.2.2):** Eine *Gruppe* ist eine Menge $G$ zusammen mit einer Verknüpfung

$$* : G \times G \longrightarrow G,$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

(Assoziativität) $\forall a, b, c \in G$:
$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

$$\exists e \in G:$$

(neutrales Element) $\forall a \in G$:
$$e * a = a$$

+ (Inverse) $\forall a \in G: \ \exists a' \in G$:
$$a' * a = e.$$

Eine *abelsche* Gruppe ist eine Gruppe, für die außerdem gilt:

(Kommutativität) $\forall a, b \in G$:
$$a * b = b * a$$

**Notation:** in $(G,+)$: $\quad e = 0$
$\qquad a' = -a$

in $(G,\cdot)$: $\quad e = 1$
$\qquad a' := a^{-1}$

**Konvention:** $+$ kommutativ,
$\cdot$ nicht unbedingt.

**Def. (2.2.2(a)):** Die symmetrische Gruppe $(\mathfrak{S}(X),\circ)$ einer Menge $X$ ist die Menge

$$\mathfrak{S}(X) := \{X \xrightarrow{f} X \mid f \text{ bijektiv}\}$$

zusammen mit der Komposition $\circ$.

**Notation:** $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(\{1,\dots,n\})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & \dots & & & f(n) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \{1,\dots,n\} & i \\ \downarrow f & \downarrow \\ \{1,\dots,n\} & f(i) \end{pmatrix}$$

**Satz:** Die symmetrische Gruppe ist eine Gruppe.

(Assoziativität) $\forall a,b,c \in G$:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

(neutrales Element) $\exists e \in G$: $\forall a \in G$:

$$e * a = a$$

+ (Inverse) $\forall a \in G$: $\exists a' \in G$:

$$a' * a = e.$$

**Satz (2.2.3):** Sei $(G, *)$ eine Gruppe.

(a) Das neutrale Element $e$ ist eindeutig bestimmt, (iii) und $\forall a \in G$: $a * e = a.$ (ii)

(b) Für jedes $a \in G$ ist das Inverse $a'$ eindeutig bestimmt (iv) und es gilt $a * a' = e$ (i)

(c) Es ist $(a')' = a$

und $(a * b)' = b' * a' \neq a' * b'$