

Lineare Algebra I

Blatt 2

1 | Dienst nach Vorschrift

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Abbildungen? Welche der wohldefinierten Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

- | | | | |
|--|---|--|---|
| (a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$ | (b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$ | (c) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x^2 \mapsto x$ | (d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$ |
| (e) $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$\frac{a}{b} \mapsto \frac{b}{a}$ | (f) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
$n \mapsto \begin{cases} n-1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n+1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ | (g) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$
$n \mapsto \begin{matrix} \text{Anzahl der} \\ \text{verschiedenen} \\ \text{Primfaktoren von } n \end{matrix}$ | |

Geben Sie zu den bijektiven Abbildungen jeweils die Umkehrabbildung an!

(Für eine nicht-negative reelle Zahl x bezeichnet das Symbol $\sqrt{x}$ die nicht-negative Wurzel von x .)

2 | Schnittbild

Das Bilden von Urbildern vertauscht mit Vereinigungen und Schnitten: für beliebige Abbildungen $f: M \rightarrow N$ und beliebige Familien von Teilmengen $N_i \subseteq N$ gilt

$$f^{-1}(\bigcup_{i \in I} N_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(N_i) \quad \text{und} \quad f^{-1}(\bigcap_{i \in I} N_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(N_i).$$

Wie sieht es mit Bildern aus? Gilt auch $f(\bigcup_{i \in I} M_i) = \bigcup_{i \in I} f(M_i)$ für beliebige Teilmengen $M_i \subseteq M$? Gilt $f(\bigcap_{i \in I} M_i) = \bigcap_{i \in I} f(M_i)$?

3 | Binomische Baukasten ★

Sei M eine endliche Menge mit n Elementen.

- (a) Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ ist wieder endlich. Aus wie vielen Elementen besteht sie?
- (b) Ist M nicht leer, so sind die Menge $\mathfrak{P}^0(M) \subset \mathfrak{P}(M)$ der Teilmengen, die aus einer geraden Anzahl von Elementen bestehen, und die Menge $\mathfrak{P}^1(M)$ der Teilmengen, die aus einer ungeraden Anzahl von Elementen bestehen, gleich mächtig (d.h., es gibt eine Bijektion $\mathfrak{P}^0(M) \cong \mathfrak{P}^1(M)$).
- (c) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist definiert als die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge. Aus dem vorherigen Aufgabenteil folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

4 | Machtdemonstration ★

Die Potenzmenge einer Menge ist stets mächtiger als die Menge selbst: für jede Menge M existiert eine injektive Abbildung $M \rightarrow \mathfrak{P}(M)$, aber für keine Menge M existiert eine solche Abbildung, die bijektiv ist.

Tipp: Variieren Sie den Beweis zu Warnung 1.6 („Es gibt kein Universum“)!