

Lineare Algebra I

Blatt 3

1 | Linkskringelnd

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ mit nicht-leerem Definitionsbereich A ist genau dann injektiv, wenn sie ein Linksinverses besitzt, wenn es also eine Abbildung $A \leftarrow B : g$ gibt, für die gilt $g \circ f = \text{id}_A$.
- (b) Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ ist genau dann surjektiv, wenn sie ein Rechtsinverses besitzt, wenn es also eine Abbildung $A \leftarrow B : g$ gibt, für die gilt $f \circ g = \text{id}_B$.

2 | Gleichmacherei

Untenstehend sind einige Relationen auf $\mathbb{Z}$ angegeben. Welche sind symmetrisch? Welche reflexiv? Welche transitiv? Welche sind Äquivalenzrelationen, und was sind in diesen Fällen die Äquivalenzklassen?

- (a) $x \sim y :\Leftrightarrow xy \geq 0$
- (b) $x \sim y :\Leftrightarrow xy > 0$
- (c) $x \sim y :\Leftrightarrow x + y \geq 0$
- (d) $x \sim y :\Leftrightarrow x^3 = y^3$
- (e) $x \sim y :\Leftrightarrow (x - 2)^2 = (y - 2)^2$
- (f) $x \sim y :\Leftrightarrow 5 \text{ teilt } x - y$
- (g) $x \sim y :\Leftrightarrow x \text{ teilt } y$

3 | Quadratgruppe ★

Die Symmetriegruppe $S_{\square}$ eines Quadrats besteht aus vier Drehungen d_i um einen der Winkel $i \cdot \frac{\pi}{2}$ ($i \in \{0, \dots, 3\}$) und vier Spiegelungen: s_x (Spiegelung an der x -Achse), s_y (Spiegelung an der y -Achse), s_d (Spiegelung an der Diagonalen) und s_n (Spiegelung an der Nebendiagonalen). Was ist jeweils die Verknüpfung zweier dieser Elemente in $S_{\square}$?

4 | Eintopf ★

Zeigen Sie, dass Isomorphie von Mengen eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{E}$ aller *endlichen* Mengen definiert. Können Sie den Quotienten $\mathcal{E}/\cong$ mit einer Ihnen bekannten Menge identifizieren?