

1 | Linkskringelnd

Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ mit nicht-leerem Definitionsbereich A ist genau dann injektiv, wenn sie ein Linksinverses besitzt, wenn es also eine Abbildung $A \leftarrow B : g$ gibt, für die gilt $g \circ f = \text{id}_A$. Eine Abbildung ist surjektiv genau dann, wenn sie ein Rechtsinverses besitzt.

① $A \neq \emptyset$

($\Rightarrow$) Sei $f: A \rightarrow B$ injektiv.

1,5 P Dann ist für $b \in B$
entweder $f^{-1}(b) = \emptyset$
oder $f^{-1}(b) = \{a_b\}$
für ein $a_b \in A$.

Wähle beliebiges Element $a_\emptyset \in A$.
(möglich, da $A \neq \emptyset$).

Definiere

$$A \leftarrow B : g$$

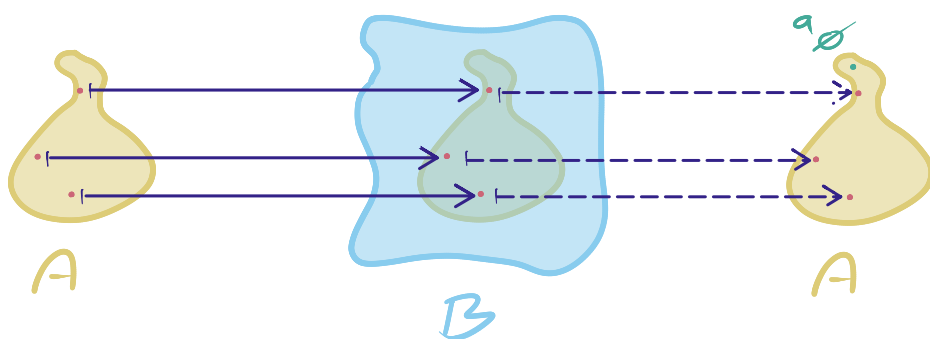
$$g(b) := \begin{cases} a_\emptyset & \text{falls } f^{-1}(b) = \emptyset \\ a_b & \text{falls } f^{-1}(b) = \{a_b\} \end{cases}$$

Dann ist per Konstruktion

$$g(f(a)) = a, \text{ denn } f^{-1}(f(a)) = \{a\}$$

$$\text{Also } g \circ f = \text{id} \quad \checkmark$$

gilt immer
wegen Injekt.



($\Leftarrow$) Sei g gegeben derart, dass
1 P $g \circ f = \text{id}$.

Seien $a, a' \in A$ mit $f(a) = f(a')$.
Dann ist $g(f(a)) = g(f(a'))$,
also $\text{id}(a) = \text{id}(a')$,
also $a = a'$

□

(2) ($\Rightarrow$) Sei $f: A \rightarrow B$ surjektiv.
1,5 P Dann ist für jedes $b \in B$
 $f^{-1}(b) \neq \emptyset$.

Wir können also für jedes
 $b \in B$ ein Element
 $a_b \in f^{-1}(b)$ wählen.

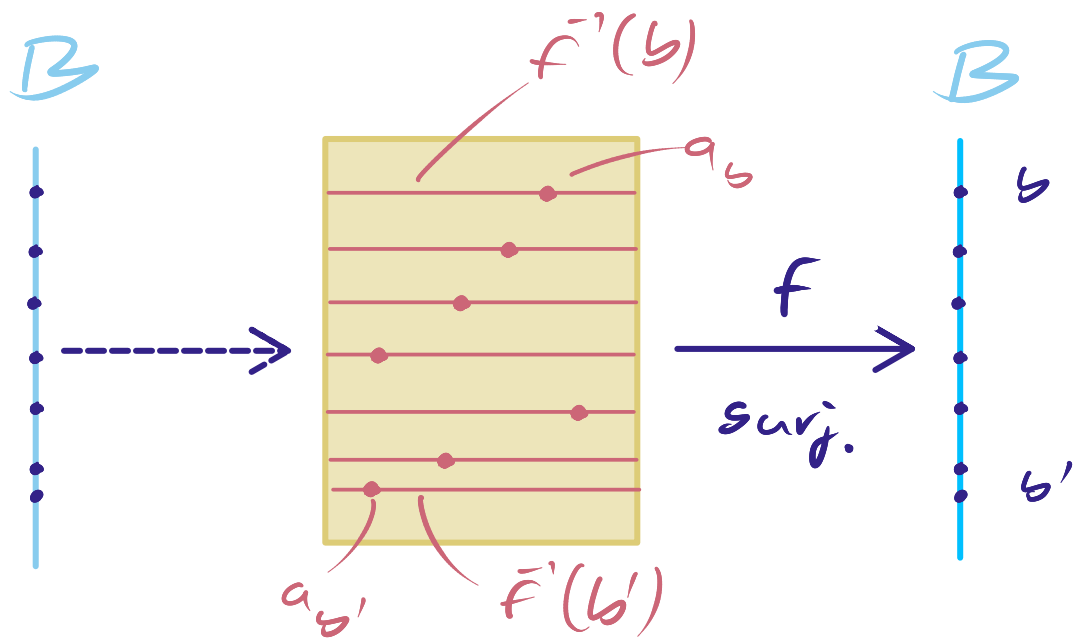
Definiere

$$g: B \rightarrow A$$
$$b \mapsto a_b.$$

Dann ist für jedes $b \in B$

$$f(g(b)) = b,$$

also ist $f \circ g = \text{id}$.



($\Leftarrow$) Sei $g: B \rightarrow A$ gegeben
 1 P sodass $f \circ g = \text{id}$.

Sei $b \in B$ beliebig.
 Es ist

$$\begin{aligned} f(g(b)) &= f(g(b)) \\ &= \text{id}(b) \\ &= b. \end{aligned}$$

Also ist f surjektiv.

□

2 | Gleichmacherei

Untenstehend sind einige Relationen auf $\mathbb{Z}$ angegeben. Welche sind symmetrisch? Welche reflexiv? Welche transitiv? Welche sind Äquivalenzrelationen, und was sind in diesen Fällen die Äquivalenzklassen?

(a) $x \sim y :\Leftrightarrow xy \geq 0$

$\frac{1}{8}$ symmetrisch, [denn $xy = yx$]
 $\frac{1}{8}$ reflexiv [denn $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$]
 $\frac{1}{4}$ { nicht transitiv, z.B.
 $1 \sim 0$ und $0 \sim -1$,
aber $1 \not\sim -1$.

(b) $x \sim y :\Leftrightarrow xy > 0$

$\frac{1}{8}$ symmetrisch, [denn $xy = yx$]
 $\frac{1}{8}$ nicht reflexiv, denn $0 \not\sim 0$.
 $\frac{1}{4}$ { transitiv: $x \sim y \wedge y \sim z$
 $\Rightarrow xy > 0 \wedge yz > 0$
 $\Rightarrow xy^2z > 0$
Insbesondere ist also $y \neq 0$
somit $y^2 > 0$ und es folgt:
 $xz > 0$, also
 $x \sim z$.

(c) $x \sim y :\Leftrightarrow x + y \geq 0$

$\frac{1}{8}$ symmetrisch, [denn $x + y = y + x$]
 $\frac{1}{8}$ nicht reflexiv, z.B. $-1 \not\sim -1$.
 $\frac{1}{4}$ { nicht transitiv, z.B.
 $-1 \sim 1$ und $1 \sim -1$,
aber $-1 \not\sim -1$.

$$(d) \ x \sim y :\Leftrightarrow x^3 = y^3$$

$\frac{1}{2}$ { Äquivalenzrelation $\sim_f$
 für $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto x^3$

$\frac{1}{2}$ { Da 3. Wurzeln eindeutig gilt sogar:
 $x \sim y \Leftrightarrow x = y$.
 Also ist $[x] = \{x\} \subseteq \mathbb{Z}$.

$$(e) \ x \sim y :\Leftrightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2$$

$\frac{1}{2}$ { Äquivalenzrelation $\sim_f$
 für $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto (x-2)^2$

$\frac{1}{2}$ { $x \sim y \Leftrightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2$
 $\Leftrightarrow x-2 = \pm (y-2)$
 $\Leftrightarrow x = \pm (y-2) + 2$
 $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = y \\ \vee \\ x = -y + 4 \end{array} \right)$
 Also
 $[x] = \{x, -x+4\} \subseteq \mathbb{Z}$

(f) $x \sim y : \Leftrightarrow 5 \text{ teilt } x - y$

$\frac{1}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Äquivalenzrelation} \quad \sim_f \quad \sim_g \\ f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \quad (\text{Beispiel 2.22}) \\ x \mapsto [x] \end{array} \right.$

$\frac{1}{2}$ $\left\{ [x] = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ hat denselben Rest modulo 5 wie } x\} \right.$

(g) $x \sim y : \Leftrightarrow x \text{ teilt } y$

$\frac{1}{8}$ nicht symmetrisch, z.B. $2 \sim 4$, $4 \not\sim 2$

$\frac{1}{8}$ reflexiv

$\frac{1}{4}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{transitiv: } x \sim y \wedge y \sim z \\ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: y = k \cdot x \\ \wedge \exists l \in \mathbb{Z}: z = l \cdot y \\ \Rightarrow z = l \cdot k \cdot x, \\ \text{also } x \sim z. \end{array} \right.$

für reflexiv/symmetrisch keine Begründung nötig

für nicht reflexiv/nicht symmetrisch Gegenbeispiel zwingend erforderlich

Gesamtpunktzahl für die Aufgabe wie immer auf halbe Punkte aufrunden!

Aufgabe 3

Wir erstellen eine Verknüpfungstabelle:

o	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	s _x	s _y	s _d	s _n
d ₀	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	s _x	s _y	s _d	s _n
d ₁	d ₁	d ₂	d ₃	d ₀	s _n	s _d	s _x	s _y
d ₂	d ₂	d ₃	d ₀	d ₁	s _y	s _x	s _n	s _d
d ₃	d ₃	d ₀	d ₁	d ₂	s _d	s _n	s _y	s _x
s _x	s _x	s _d	s _y	s _n	d ₀	d ₂	d ₁	d ₃
s _y	s _y	s _n	s _x	s _d	d ₂	d ₀	d ₃	d ₁
s _d	s _d	s _y	s _n	s _x	d ₃	d ₁	d ₀	d ₂
s _n	s _n	s _x	s _d	s _y	d ₁	d ₃	d ₂	d ₀

falls d₁ als
"im Uhrzeigersinn"
genommen wird

beides
okay!

o	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	s _x	s _y	s _d	s _n
d ₀	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	s _x	s _y	s _d	s _n
d ₁	d ₁	d ₂	d ₃	d ₀	s _d	s _n	s _y	s _x
d ₂	d ₂	d ₃	d ₀	d ₁	s _y	s _x	s _n	s _d
d ₃	d ₃	d ₀	d ₁	d ₂	s _n	s _d	s _x	s _y
s _x	s _x	s _n	s _y	s _d	d ₀	d ₂	d ₁	d ₃
s _y	s _y	s _d	s _x	s _n	d ₂	d ₀	d ₃	d ₁
s _d	s _d	s _x	s _n	s _y	d ₃	d ₁	d ₀	d ₂
s _n	s _n	s _y	s _d	s _x	d ₁	d ₃	d ₂	d ₀

falls d₁ wie
geplant als
"gegen den
Uhrzeigersinn"
genommen wird

Zeile = Spalte heißt Spalte zuerst anwenden hier
bei mir

5 Punkte - 1 Punkt pro neue Art Fehler

4 | Eintopf ★

Zeigen Sie, dass Isomorphie von Mengen eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{E}$ aller *endlichen* Mengen definiert. Können Sie den Quotienten $\mathcal{E}/\cong$ mit einer Ihnen bekannten Menge identifizieren?

zz:

$\cong$ reflexiv $X \cong X$ via id

$\cong$ symmetrisch $X \xrightarrow{\cong} Y$ via f

$\Rightarrow Y \xrightarrow{\cong} X$ via f^{-1} : f^{-1} ist Iso mit Umkehrabb. f .

$\cong$ transitiv $X \xrightarrow{\cong} Y$ via $f \wedge Y \xrightarrow{\cong} Z$ via g

$\Rightarrow X \xrightarrow{\cong} Z$ via $g \circ f$: $g \circ f$ ist Iso mit Umkehrabb. $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Betrachte $c: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{N}_0$
 $X \mapsto |X|$.

c ist surjektiv, denn $\emptyset$ hat Urbild $\emptyset$ und
 $n \in \mathbb{N}$ hat Urbild $\{1, \dots, n\}$.

Per Def. ist $\sim_c = \cong$. Also gilt nach dem
 Isomorphiesatz

$$\mathcal{E}/\sim \cong \mathcal{E}/\sim_c \cong c(\mathcal{E}) \cong \mathbb{N}_0.$$