Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Tariq Syed

Wintersemester 2025/26
07.11.2025

Lineare Algebra I
Blatt 4

---

1 | Ecce homo I

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Gruppenhomomorphismen? Bestimmen Sie bei den Gruppenhomomorphismen jeweils den Kern und das Bild!

(a) $(\mathbb{N},+) \to (\mathbb{Z},+)$, $x \mapsto -x$

(b) $(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},+)$, $x \mapsto x-2$

(c) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to (\{+1,-1\},\cdot)$, $[x] \mapsto (-1)^x$

(d) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z},+)$, $[x] \mapsto x$

(e) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot) \to (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $x \mapsto x^2$

(f) $(\{+1,-1\},\cdot) \to S_\square$, $1 \mapsto d_0$, $-1 \mapsto s_x$

(g) $(\{+1,-1\},\cdot) \to S_\square$, $1 \mapsto d_0$, $-1 \mapsto d_1$

Hier bezeichnet $S_\square$ die Symmetriegruppe eines Quadrats; siehe Aufgabe 3 auf Blatt 3 oder Beispiel 2.5 der Vorlesung.

2 | Synchronknüpfen

Seien $(G,\cdot)$ und $(H,\circ)$ zwei Gruppen. Zeigen Sie:

(a) Das kartesische Produkt $G \times H$ ist mittels der „elementweisen Verknüpfung“

$$(g,h)\odot(g',h') := (g\cdot g', h\circ h')$$

wieder eine Gruppe.

(b) Die Projektionen $(G,\cdot) \twoheadleftarrow (G\times H,\odot) \twoheadrightarrow (H,\circ)$ sind Gruppenhomomorphismen.

(c) Es gibt kanonische Monomorphismen $i_G\colon (G,\cdot) \hookrightarrow (G\times H,\odot) \hookleftarrow (H,\circ) : i_H$.

(d) Die Untergruppen $\operatorname{im} i_G$ und $\operatorname{im} i_H$ sind normal, und die Quotientengruppen $G/\operatorname{im}(i_G)$ und $G/\operatorname{im}(i_H)$ sind isomorph zu H bzw. G.

3 | Vollversammlung ★

(a) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$ von der Form $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ist, für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Ist der Schnitt $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ für beliebige $m,n \in \mathbb{N}_0$ wieder eine Untergruppe? Wenn ja, welche?

4 | Selbsthilfegruppe ★

Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $H \subseteq G$ genau dann eine Untergruppe von G definiert, wenn gilt:

(a) Die Verknüpftung $\cdot$ lässt sich einschränken auf H, also $x\cdot y \in H$ für alle $x,y \in H$.

(b) Zusammen mit dieser eingeschränkten Verknüpfung ist H selbst eine Gruppe.

Abgabefrist: 17.11.2025, 10:15 Uhr.