

1 | Ecce homo I

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Gruppenhomomorphismen?
Bestimmen Sie bei den Gruppenhomomorphismen jeweils den Kern und das Bild!

(a) $(\mathbb{N}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$
 $x \mapsto -x$ kein Gruppenhomo, da $(\mathbb{N}, +)$ keine Gruppe

(b) $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$
 $x \mapsto x - 2$ kein Gruppenhomo, denn $0 \mapsto -2 \neq 0$

(c) $\overset{f}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \rightarrow (\{+1, -1\}, \cdot)$ Gruppenhomo.
 $[x] \mapsto (-1)^x$

Option A: siehe Vorlesung, Bsp. — .

Option B:

wohldef.: Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $[x] = [y]$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gegeben.

$$\text{zz: } (-1)^x = (-1)^y$$

Dazu: Nach Annahme $y = x + 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$,
also $(-1)^y = (-1)^{x+2k} = (-1)^x \cdot \underbrace{(-1)^{2k}}_1 = (-1)^x$.

Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} f([x] + [y]) &= f([x+y]) = (-1)^{x+y} \\ f([x]) \cdot f([y]) &= (-1)^x \cdot (-1)^y = \end{aligned}$$

$$\text{im}(f) = \{\pm 1\}$$

$$\text{ker}(f) = \{[0]\}$$

(d) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ nicht wohldef.
 $[x] \mapsto x$

$$\begin{aligned} [0] &\mapsto 0 \\ \parallel \\ [2] &\mapsto 2 \end{aligned}$$

$$(e) f: (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$$

$$x \mapsto x^2$$

wohldef.: Für $x \neq 0$ ist auch $x^2 \neq 0$.

Gruppenhomom.: $f(x \cdot y) = (x \cdot y)^2$
 $f(x) \cdot f(y) = x^2 \cdot y^2$ da $\cdot$ kommutativ in $\mathbb{R}$.

$$\text{im}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\ker(f) = \{\pm 1\}$$

$$(f) (\{+1, -1\}, \cdot) \rightarrow S_{\square}$$

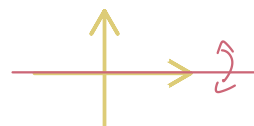
$$1 \mapsto d_0$$

$$-1 \mapsto s_x$$

Gruppenhomom.



$$S_{\square} = \{ \underset{\substack{\parallel \\ \text{id} \\ \uparrow \\ \text{(neutral)}}}{d_0}, d_1, d_2, d_3, \underset{\parallel}{s_x}, s_y, s_n, s_d \}$$



$$f(1 \cdot 1) = f(1) = d_0 = d_0 \circ d_0 = f(1) \cdot f(1) \quad \checkmark$$

$$f(1 \cdot (-1)) = f(-1) = s_x = d_0 \circ s_x = f(1) \cdot f(-1) \quad \checkmark$$

$$f((-1) \cdot 1) = f(-1) = s_x = s_x \circ d_0 = f(-1) \cdot f(1) \quad \checkmark$$

$$f((-1) \cdot (-1)) = f(1) = d_0 = s_x \circ s_x = f(-1) \cdot f(-1) \quad \checkmark$$

$$\text{im}(f) = \{d_0, s_x\}$$

$$\ker(f) = \{1\}$$

$$(g) (\{+1, -1\}, \cdot) \rightarrow S_{\square}$$

$$1 \mapsto d_0$$

$$-1 \mapsto d_1$$

kein Gruppenhomom.

$$f((-1) \cdot (-1)) = f(1) = d_0 \neq \underbrace{d_1 \circ d_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{Rotation} \\ \text{um } 180^\circ}} = f(-1) \cdot f(-1)$$

2 | Synchronknüpfen

Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ zwei Gruppen. Zeigen Sie:

(a) Das kartesische Produkt $G \times H$ ist mittels der „elementweisen Verknüpfung“

$$(g, h) \circ (g', h') := (g \cdot g', h \circ h')$$

wieder eine Gruppe.

○ **assoziativ**: Seien $(g, h), (g', h'), (g'', h'') \in G \times H$

$$(g, h) \circ ((g', h') \circ (g'', h''))$$

$$\stackrel{\text{Def } \circ}{=} (g, h) \circ (g' \cdot g'', h' \circ h'')$$

$$\stackrel{\text{Def } \circ}{=} (g \cdot (g' \cdot g''), h \circ (h' \circ h''))$$

$$\stackrel{\substack{\cdot \text{ assoziativ} \\ \circ \text{ assoziativ}}}{=} ((g \cdot g') \cdot g'', (h \circ h') \circ h'')$$

$$\stackrel{\text{Def } \circ}{=} (g \cdot g', h \circ h') \circ (g'', h'')$$

$$\stackrel{\text{Def } \circ}{=} ((g, h) \circ (g', h')) \circ (g'', h'')$$

∃ neutrales Element in $(G \times H, \circ)$: $(1_G, 1_H)$.

Für jedes $(g, h) \in G \times H$ gilt:

$$(1_G, 1_H) \circ (g, h) \stackrel{\text{Def } \circ}{=} (1_G \cdot g, 1_H \circ h)$$

$$= (g, h) \quad \checkmark$$

1_G neutral für $\cdot$
 1_H neutral für $\circ$

$$\text{und } (g, h) \circ (1_G, 1_H) \stackrel{\text{Def } \circ}{=} (g \cdot 1_G, h \circ 1_H)$$

$$= (g, h) \quad \checkmark$$

1_G neutral für $\cdot$
 1_H neutral für $\circ$

Existenz inverse Elemente: Sei $(g, h) \in G \times H$.

(*) Sei $g^{-1} \in G$ ein Inverses zu g bzgl. $\cdot$.

(*) Sei $h^{-1} \in H$ ein Inverses zu h bzgl. $\circ$.

Dann ist $(g^{-1}, h^{-1}) \in G \times H$ ein Inverses zu (g, h) bzgl. $\odot$:

$$(g, h) \odot (g^{-1}, h^{-1}) = \underset{\text{Def. } \odot}{(g \cdot g^{-1}, h \circ h^{-1})} = \underset{(*)}{(1_G, 1_H)} \quad \checkmark$$

$$(g^{-1}, h^{-1}) \odot (g, h) = \underset{\text{Def. } \odot}{(g^{-1} \cdot g, h^{-1} \circ h)} = \underset{(*)}{(1_G, 1_H)} \quad \checkmark$$

(b) Die Projektionen $(G, \cdot) \xleftarrow{\pi_G} (G \times H, \odot) \xrightarrow{\pi_H} (H, \circ)$ sind Gruppenhomomorphismen.

$$\begin{aligned} \pi_G((g, h) \odot (g', h')) &\stackrel{\text{Def. } \odot}{=} \pi_G(g \cdot g', h \circ h') \\ &= g \cdot g' \\ &= \pi_G(g, h) \cdot \pi_G(g', h') \quad \checkmark \end{aligned}$$

Analog für π_H .

(c) Es gibt kanonische Monomorphismen $i_G: (G, \cdot) \hookrightarrow (G \times H, \odot) \hookleftarrow (H, \circ) : i_H$.

$$i_G: g \mapsto (g, 1_H)$$

$$(1_G, h) \leftarrow h : i_H$$

i_G ist Gruppenhomo:

$$\begin{aligned} i_G(g \cdot g') &= (g \cdot g', 1_H) \\ &= (g \cdot g', 1_H \circ 1_H) \\ &\stackrel{\text{Def. } \odot}{=} (g, 1_H) \odot (g', 1_H) \\ &= i_G(g) \odot i_G(g') \end{aligned}$$

i_G ist injektiv:

Variante 1: Seien $g, g' \in G$ derart, dass

$$i_G(g) = i_G(g').$$

Dann ist

$$\pi_G i_G(g) = \pi_G i_G(g'),$$

also

$$g = g'.$$

Variante 2: folgt aus Injektivitätskr., denn

$$i_G(g) = (1_G, 1_H) \Leftrightarrow g = 1_G.$$

Für i_H analog.

(d) Die Untergruppen $\text{im } i_G$ und $\text{im } i_H$ sind normal, und die Quotientengruppen $G/\text{im}(i_G)$ und $G/\text{im}(i_H)$ sind isomorph zu H bzw. G .

$$\begin{aligned} \text{im}(i_G) &= \{ (g, h) \in G \times H \mid h = 1_H \} \\ &= \ker(\pi_H), \end{aligned}$$

und Kerne sind normal.

Ferner folgt aus dem Isomorphiesatz:

$$\frac{G \times H}{\text{im}(i_G)} = \frac{G \times H}{\ker(\pi_H)} \cong \text{im}(\pi_H) = H.$$

$\uparrow$ π_H surjektiv.

Analog

$$\frac{G \times H}{\text{im}(i_H)} = \frac{G \times H}{\ker(\pi_G)} \cong \text{im}(\pi_G) = G.$$

3 | Vollversammlung ★

- (a) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ von der Form $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ist, für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$.

Sei $H \subseteq \mathbb{Z}$ eine beliebige Untergruppe.

Notwendigerweise $0 \in H$.

Falls $H = \{0\}$ wähle $n := 0$. ($\{0\} = 0 \cdot \mathbb{Z}$) ✓

Falls $H \neq \{0\}$, ex. ein $u \in H$ mit $u \neq 0$.

Wir können o.B.d.A. annehmen, $u > 0$.

(Falls $u < 0$, so ist $-u > 0$, und da H eine Untergruppe ist, ist auch $-u \in H$.)

Wähle nun $u \in H$ minimal mit $u > 0$.

Beh.: $H = u \cdot \mathbb{Z}$.

($H \supseteq u\mathbb{Z}$): Jedes Element von $u\mathbb{Z}$ hat die Form $u \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Falls $k \geq 0$: Induktion über k .

IA: $u \cdot 0 = 0 \in H$ ✓

IS: $u \cdot (k+1) = \underbrace{u \cdot k}_{\in H} + \underbrace{u}_{\in H}$
nach IV
 $\in H$, da H Untergr.

Falls $k \leq 0$: $u \cdot k = - \underbrace{u \cdot (-k)}_{\geq 0}$

$\underbrace{\geq 0}_{\in H \text{ (s.o.)}}$
 $\in H$, da H Untergruppe

($H \subseteq u\mathbb{Z}$): Sei $h \in H$ beliebig.

Division mit Rest liefert:

$$h = q \cdot u + s$$

für ein $q \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq s < u$.

Da $h \in H$ und $g \cdot h \in H$, folgt $s = h - g \cdot h \in H$.
 Wegen Minimalität von n folgt also $s = 0$.
 Also ist $h = g \cdot h \in n \cdot \mathbb{Z}$.

(b) Ist der Schnitt $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}_0$ wieder eine Untergruppe? Wenn ja, welche?

Allgemeiner gilt: (nicht notw. abelsche Gruppe)
 Ist $(G, +)$ eine Gruppe, $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen,
 so ist $H_1 \cap H_2$ auch eine Untergruppe.

Beweis:

- $0 \in H_1 \cap H_2$, denn $0 \in H_1$ und $0 \in H_2$
 - Für $x, y \in H_1 \cap H_2$ ist auch $x + y \in H_1 \cap H_2$:

$$\left. \begin{array}{l} x \in H_1 \text{ und } y \in H_1, \text{ also } x + y \in H_1 \\ x \in H_2 \text{ und } y \in H_2, \text{ also } x + y \in H_2 \end{array} \right\} \text{ Also ist } x + y \in H_1 \cap H_2$$
 - Für $x \in H_1 \cap H_2$ ist auch $-x \in H_1 \cap H_2$ [analog]
- Im vorliegenden Fall:

$$n \cdot \mathbb{Z} \cap m \cdot \mathbb{Z} = \text{kgV}(n, m) \cdot \mathbb{Z}$$

($\subseteq$): Sei $x \in n \cdot \mathbb{Z} \cap m \cdot \mathbb{Z}$.

Dann ist x Vielfaches von n und
 Vielfaches von m

also gemeinsames Vielfaches von n, m
 also Vielfaches von $\text{kgV}(n, m)$.

($\supseteq$) Sei $x \in \text{kgV}(n, m) \cdot \mathbb{Z}$, also

$$x = \text{kgV}(n, m) \cdot k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Da $\text{kgV}(n, m)$ Vielfaches von n ist, folgt:

x ist Vielfaches von n , also $x \in n \cdot \mathbb{Z}$.

Da $\text{kgV}(n, m)$ Vielfaches von m ist, folgt:

x ist Vielfaches von m , also $x \in m \cdot \mathbb{Z}$.

Also $x \in n \cdot \mathbb{Z} \cap m \cdot \mathbb{Z}$.

4 | Selbsthilfegruppe ★

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $H \subseteq G$ genau dann eine Untergruppe von G definiert, wenn gilt:

- (a) Die Verknüpfung $\cdot$ lässt sich einschränken auf H , also $x \cdot y \in H$ für alle $x, y \in H$.
- (b) Zusammen mit dieser eingeschränkten Verknüpfung ist H selbst eine Gruppe.

($\Rightarrow$) Sei $H \leq G$ eine Untergruppe gemäß Def. 2.8
also $(U1) \quad 1_G \in H$

$$(U2) \quad x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$$

$$(U3) \quad x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$$

Dann gilt (a) wegen Axiom U2,

und (b) ist auch klar (Notiz 2.9).

($\Leftarrow$) Seien (a) & (b) erfüllt. Schreibe $\cdot_H$ für die eingeschränkte Verknüpfung, 1_H für das neutrale Element von H und $()^{-H}$ für Inversion in H .

Variante 1: Wende Notiz 2.11 an.

Sei $i: H \longrightarrow G$ die kanonische Inklusion.

In dieser Notation ist zu zeigen:

$$(U1) \quad 1_G \in i(H)$$

$$(U2) \quad \forall x, y \in H \text{ ist } i(x) \cdot i(y) \in i(H)$$

$$(U3) \quad \forall x \in H \text{ ist } i(x)^{-1} \in i(H).$$

Wir sehen an (a), dass i einen Gruppenhomo.

$i: (H, \cdot_H) \longrightarrow (G, \cdot)$ definiert ($i(x) \cdot i(y) = i(x \cdot_H y)$ per Definition von $\cdot_H$). Also gilt nach Notiz 2.11.:

$$(*) \quad i(1_H) = 1_G$$

und $(**) \quad \forall x \in H: i(x^{-H}) = i(x)^{-1}$

Aus $(*)$ folgt (U1).

Aus $(**)$ folgt (U2).

Variante 2: Ahme Beweis von Notiz 2.11 nach.

[...]

Falsch: $1_H = 1_G$ wegen Eindeutigkeit von neutralen Elementen.

a priori
nicht neutral
in G

a priori
nicht in H

Falsch: $x^{-H} = x^{-1}$ wegen Eindeutigkeit von Inversen.

Invers bzgl.
 1_H , nicht
bzgl. 1_G

Invers bzgl.
 1_G , nicht
bzgl. 1_H
a priori
nicht in H

