

1 | Ecce homo I

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Gruppenhomomorphismen?
Bestimmen Sie bei den Gruppenhomomorphismen jeweils den Kern und das Bild!

(a) $(\mathbb{N}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$

$\frac{1}{2}$

$x \mapsto -x$

Kein Gruppenhomomorphismus
denn $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe.

(b) $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$

$\frac{1}{2}$

$x \mapsto x - 2$

Kein Gruppenhomomorphismus
denn $0 \mapsto -2 \neq 0$

(c) $f: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow (\{+1, -1\}, \cdot)$

$\frac{1}{4}$

$[x] \mapsto (-1)^x$

$\frac{1}{4}$ wohldefiniert: $[x] = [y]$

$$\Rightarrow x - y \in 2\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (-1)^{x-y} = 1$$

$$(-1)^x \cdot (-1)^{-y} = 1$$

$$\Rightarrow (-1)^x = (-1)^y$$

$$\text{also } f([x]) = f([y]) \checkmark$$

$\frac{1}{4}$ Gruppenhomomorphismus:

Def. von $+$
auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$f([x] + [y]) = f([x + y])$$

$$= (-1)^{x+y}$$

$$= (-1)^x \cdot (-1)^y$$

$$= f([x]) \cdot f([y])$$

$$\frac{1}{4} \text{ im}(f) = \{\pm 1\}$$

$$\frac{1}{4} \text{ ker}(f) = \{[0]\}$$

$$(d) \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$$

$$\textcircled{\frac{1}{2}} [x] \mapsto x$$

nicht wohldefiniert:

$$[0] \mapsto 0$$

$$\parallel$$

$$[2] \mapsto 2$$

$$(e) f: (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$$

$$\textcircled{1} x \mapsto x^2$$

$\frac{1}{2}$ Gruppenhomomorphismus:

$$f(x \cdot y) = (xy)^2 = x^2 y^2 = f(x) \cdot f(y)$$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ a. G. abelsch

$$\frac{1}{4} \text{ im}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\frac{1}{4} \text{ ker}(f) = \{+1, -1\}$$

$$(f): (\{+1, -1\}, \cdot) \rightarrow S_{\square}$$

①

$$1 \mapsto d_0$$

$$-1 \mapsto s_x$$

Gruppenhomomorphismus:

$$f(1 \cdot 1) = f(1) = d_0 = d_0 \circ d_0 = f(1) \circ f(1)$$

$$f(1 \cdot (-1)) = f(-1) = s_x = d_0 \circ s_x = f(1) \circ f(-1)$$

$$f((-1) \cdot 1) = \dots \text{ analog } \dots = f(-1) \circ f(1)$$

$$\frac{1}{2} f((-1) \cdot (-1)) = f(1) = d_0 = s_x \circ s_x = f(-1) \circ f(-1)$$

entscheidend

$$\frac{1}{4} \text{ im}(f) = \{d_0, s_x\}$$

$$\frac{1}{4} \text{ ker}(f) = \{1\}$$

$$(g): (\{+1, -1\}, \cdot) \rightarrow S_{\square}$$

②

$$1 \mapsto d_0$$

$$-1 \mapsto d_1$$

Kein Gruppenhomomorphismus denn

$$f((-1) \cdot (-1)) = f(1) = d_0$$

$$f(-1) \circ f(-1) = d_1 \circ d_1 = d_2$$

Begründungen sind nötig in dem Umfang, in dem sie hier angegeben sind.

Gesamtpunktzahl für die Aufgabe auf halbe Punkte aufrunden.

2 | Synchronknüpfen

Das kartesische Produkt $G \times H$ zweier Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ ist mittels der „elementweisen Verknüpfung“

$$(g, h) \circ (g', h') := (g \cdot g', h \circ h')$$

wieder eine Gruppe.

Gruppe:

(G1) $\circ$ assoziativ:

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} [(g, h) \circ (g', h')] \circ (g'', h'') \\ & \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} (g \cdot g', h \circ h') \circ (g'', h'') \\ & \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} ((g \cdot g') \cdot g'', (h \circ h') \circ h'') \\ & \stackrel{\substack{= \text{assoziativ} \\ = \text{assoziativ}}}{=} (g \cdot (g' \cdot g''), h \circ (h' \circ h'')) \\ & \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} (g, h) \circ (g' \cdot g'', h' \circ h'') \\ & \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} (g, h) \circ [(g', h') \circ (g'', h'')] \end{aligned}$$

(G2): $\exists$ neutrales Element

$\textcircled{1}$ Sei 1_G neutrales Element von G .
Sei 1_H neutrales Element von H .

Dann ist $(1_G, 1_H)$ neutrales Element für $\circ$:

$$(1_G, 1_H) \circ (g, h) \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} (1_G \cdot g, 1_H \circ h)$$

$\frac{1}{4}$ Punkt Abzug, falls nur $= (g, h)$
eine der beiden Beel. gezeigt wird

$$\text{und } (g, h) \circ (1_G, 1_H) \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} (g \cdot 1_G, h \circ 1_H) \\ = (g, h)$$

(G3) $\exists$ Inverse Elemente:

① Sei $(g, h) \in G \times H$ gegeben.

Sei $g' \in G$ invers zu g ,

$h' \in H$ invers zu h .

Dann ist (g', h') invers zu (g, h) :

$$(g, h) \circ (g', h') \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} (g \cdot g', h \circ h') = (1_G, 1_H)$$

$$(g', h') \circ (g, h) \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} (g' \cdot g, h' \circ h) = (1_G, 1_H)$$

$\frac{1}{4}$ Punkt Abzug, falls nur eine der beiden Bedingungen gezeigt wird.

Ferner sind die Projektionen $(G, \cdot) \xleftarrow{\pi_G} (G \times H, \circ) \xrightarrow{\pi_H} (H, \circ)$ Homomorphismen.

②

$$\pi_G((g, h) \circ (g', h')) \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} \pi_G((g \cdot g', h \circ h'))$$

$$= g \cdot g'$$

$$= \pi_G((g, h)) \cdot \pi_G((g', h'))$$

Für π_H lässt sich das analog zeigen.

(das reicht)

Sowohl G als auch H lassen sich als Untergruppen von $(G \times H, \odot)$ auffassen: es gibt kanonische Monomorphismen $(G, \cdot) \hookrightarrow (G \times H, \odot) \hookleftarrow (H, \circ)$.

(1/2)

$$i_G: (G, \cdot) \longrightarrow (G \times H, \odot) \\ g \longmapsto (g, 1_H)$$

i_G ist Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} i_G(g \cdot g') &= (g \cdot g', 1_H) \\ &= (g \cdot g', 1_H \cdot 1_H) \\ &= (g, 1_H) \odot (g', 1_H) \\ &= i_G(g) \odot i_G(g'). \end{aligned}$$

i_G ist Monomorphismus:

$$\begin{aligned} i_G(g) &= i_G(g') \\ \rightarrow \underbrace{\pi_G(i_G(g))}_g &= \underbrace{\pi_G(i_G(g'))}_{g'} \end{aligned}$$

$$\text{F\"ur } i_H: (H, \circ) \longrightarrow (G \times H, \odot) \\ h \longmapsto (1_G, h)$$

l\"asst sich das analog zeigen.

(das reicht)

. Diese Untergruppen – also genauer die Bilder dieser

Monomorphismen – sind normal.

$\frac{1}{2}$

Option A:

$$i_G(G) = \{ (g, 1_H) \mid g \in G \} = \ker(\pi_H)$$

$$i_H(H) = \{ (1_G, h) \mid h \in H \} = \ker(\pi_G)$$

Kerne sind normal nach Korollar 2.24.

Option B:

Für $(g, h) \in G \times H$ ist

$$\begin{aligned} (g, h) \circ i_G(G) &= \{ (g \cdot g', h \cdot 1_H) \mid g' \in G \} \\ &= \{ (g'', h) \mid g'' \in G \}, \end{aligned}$$

$\subseteq$ Wähle $g'' := g \cdot g'$.

$\supseteq$ Wähle $g' := g^{-1} \cdot g''$.

und genauso ist

$$i_G(G) \circ (g, h) = \{ (g'', h) \mid g'' \in G \}.$$

Also

$$(g, h) \circ i_G(G) = i_G(G) \circ (g, h).$$

Analog für $i_H(H)$.

(das reicht)

Was sind die jeweiligen Quotientengruppen?

$\frac{1}{2}$

$$\ker(\pi_G) = i_H(H) \quad (\text{siehe oben})$$

also

$$\frac{G+H}{i_H(H)} \xrightarrow[\cong]{\pi_G} \text{im}(\pi_G) = G$$

nach Isomorphiesatz 2.25.

Analog $\frac{G+H}{i_G(G)} \cong H$.

$\uparrow$
(das reicht)

Wie immer auf halbe Punkte aufrunden.

Aufgabe 3

(a) Sei H eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$.

Ist $H = \{0\}$, so wählen wir $n = 0$.

1 Pkt

Sei also von nun an H nicht trivial. Es ex. also ein Element $m \in H$ mit $m \neq 0$. Da H eine Gruppe ist, liegt auch $-m$ in H , sodass H ein positives Element enthält (ist $m < 0$, so $-m > 0$; $m > 0$ ✓)

Sei $n \in H$ minimal mit $n > 0$. Dann erhalten wir zunächst eine Inklusion $n\mathbb{Z} \subset H$ und wir behaupten nun, dass diese Inklusion eine Gleichheit ist.

1 Pkt

Ang., es ex. ein $h \in H$ mit $h \notin n\mathbb{Z}$. Dann gilt auch $-h \notin n\mathbb{Z}$, sodass wir annehmen können, dass $h > 0$ ist (ansonsten nehme $-h$). Division mit Rest liefert nun

$$h = qn + r$$

mit $0 < r < n$, da $h \notin n\mathbb{Z}$. Da $h \in H$ und $qn \in n\mathbb{Z} \subset H$, gilt auch $r = h - qn \in H$, was ein Widerspruch zur Minimalität von n ist. Also $H = n\mathbb{Z}$.

1 Pkt

(6)

1 Pwr.

Wir zeigen allgemeiner, dass der Schnitt zweier Untergruppen H, H' einer Gruppe G erneut eine Untergruppe ist:

(i) Da $1_G \in H$ und $1_G \in H'$, gilt $1_G \in H \cap H'$

(ii) Seien $h, h' \in H \cap H'$. Dann gelten $h \cdot h' \in H$ und $h \cdot h' \in H'$, da H und H' Untergruppen von G sind. Also $h \cdot h' \in H \cap H'$.

(iii) Sei $h \in H \cap H'$. Dann ist $h^{-1} \in H$ und $h^{-1} \in H'$, da H und H' Untergruppen von G sind, sodass h^{-1} auch in $H \cap H'$ enthalten ist.

Somit ist $H \cap H'$ eine Untergruppe von G .

1 Pwr.

Behauptung: $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \text{kgV}(m, n)\mathbb{Z}$

Sei $g \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$, also $g = na = mb$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Das Element g ist also ein Vielfaches von n und m und somit auch von $\text{kgV}(m, n)$. Somit $g \in \text{kgV}(m, n)\mathbb{Z}$.

Sei $g \in \text{kgV}(m, n)\mathbb{Z}$, also $g = \text{kgV}(m, n)a$ für ein $a \in \mathbb{Z}$. Da $\text{kgV}(m, n) = bm = cn$ für geeignete $b, c \in \mathbb{Z}$, gilt also $g \in n\mathbb{Z}$ und $g \in m\mathbb{Z}$.

4 | Selbsthilfegruppe ★

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $H \subseteq G$ genau dann eine Untergruppe von G definiert, wenn gilt:

- (a) Die Verknüpfung $\cdot$ lässt sich einschränken auf H , also $x \cdot y \in H$ für alle $x, y \in H$.
- (b) Zusammen mit dieser eingeschränkten Verknüpfung ist H selbst eine Gruppe.

($\Rightarrow$) Sei $H \leq G$ eine Untergruppe gemäß Def. 2.8.

2P Dann gilt (a) wegen Axiom U2,
und (b) ist auch klar (Notiz 2.9).

($\Leftarrow$) Seien (a) & (b) erfüllt. Schreibe $\cdot_H$ für die
3P eingeschränkte Verknüpfung, 1_H für das neutrale
Element von H und $()^{-H}$ für Inversion in H .

Variante 1: Wende Notiz 2.11 an.

Sei $i: H \longrightarrow G$ die kanonische Inklusion.

In dieser Notation ist zu zeigen:

$$(U1) \quad 1_G \in i(H)$$

$$(U2) \quad \forall x, y \in H \text{ ist } i(x) \cdot i(y) \in i(H)$$

$$(U3) \quad \forall x \in H \text{ ist } i(x)^{-1} \in i(H).$$

Wir sehen an (a), dass i einen Gruppenhomo.

$i: (H, \cdot_H) \longrightarrow (G, \cdot)$ definiert ($i(x) \cdot i(y) = i(x \cdot_H y)$ per

Definition von $\cdot_H$). Also gilt nach Notiz 2.11.:

$$(*) \quad i(1_H) = 1_G$$

und $(**) \quad \forall x \in H: i(x^{-H}) = i(x)^{-1}$

Aus $(*)$ folgt (U1).

Aus $(**)$ folgt (U2).

Variante 2: Ahme Beweis von Notiz 2.11 nach.

[...]



Falsch: $1_H = 1_G$ wegen Eindeutigkeit von neutralen Elementen.

a priori
nicht neutral
in G

a priori
nicht in H

Falsch: $x^{-H} = x^{-1}$ wegen Eindeutigkeit von Inversen.

invers bzgl.
 1_H , nicht
bzgl. 1_G

invers bzgl.
 1_G , nicht
bzgl. 1_H ;
a priori
nicht in H