

Lineare Algebra I

Blatt 5

1 | Zykelzerlegung

Zerlegen Sie folgende Permutationen in Zykel und berechnen Sie jeweils das Signum! Geben Sie außerdem die inversen Permutationen α^{-1} , β^{-1} und γ^{-1} an!

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 8 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 3 & 1 & 2 & 10 & 9 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2 | Kleingruppen

Die **Verknüpfungstabelle** einer Gruppe $(G, *)$ hat eine Zeile für jedes Element $x \in G$ und eine Spalte für jedes Element $y \in G$. Sei weist in Zeile x und Spalte y den Wert von $x * y$ aus (vgl. Blatt 3, Aufgabe 3).

- (a) Geben Sie die Verknüpfungstabellen zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ und zur Gruppen $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ (siehe Blatt 4, Aufgabe 2) an!
- (b) Zeigen Sie, dass jede Gruppe mit zwei Elementen isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ ist!
- (c) Zeigen Sie, dass jede Gruppe mit drei Elementen isomorph zu $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ ist!
- (d) Ist die Gruppe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

*Tipp für (b–d): Zeigen Sie zunächst, dass für jedes Element y einer Gruppe $(G, *)$ die durch $x \mapsto x * y$ und $x \mapsto y * x$ definierten Abbildungen $G \rightarrow G$ Bijektionen sind. Folgern Sie hieraus, dass in der Verknüpfungstabelle in jeder Zeile jedes Element von G genau einmal auftritt, und dass auch in jeder Spalte jedes Element von G genau einmal auftritt.*

3 | Gaußsche Zahlen ★

- (a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\mathbb{Z}[\mathbf{i}] = \{a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ einen Unterring der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ definiert. Das heißt im Einzelnen: $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ definiert eine Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$, die Multiplikation von $\mathbb{C}$ lässt sich auf $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ einschränken, und $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ enthält das neutrale Element 1 der Multiplikation.

(Es lässt sich leicht prüfen, dass ein Unterring insbesondere selbst wieder ein Ring ist.)

- (b) Zeigen Sie, dass eine Zahl $z \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ genau dann in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ eine Einheit, also invertierbar bezüglich der Multiplikation, ist, wenn $\|z\| = 1$ ist.
- (c) Wie viele Einheiten gibt es in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$? Zu welcher aus der Vorlesung bekannten Gruppe ist die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}[\mathbf{i}])^\times$ isomorph?

4 | Millimeterarbeit ★

Zu je zwei teilerfremden Zahlen $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existieren Koeffizienten $x, y \in \mathbb{Z}$, für die gilt:

$$xm + yn = 1$$

Bitte merken Sie sich diese Aussage, selbst wenn Sie die Aufgabe nicht bearbeiten. Sie wird Ihnen noch nützlich sein.

Beweisen Sie die Aussage wie folgt:

Schritt 1: Es gibt eine Abbildung $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$, die $([x], [y])$ auf $[xm + yn]$ abbildet.

Schritt 2: Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus.

Schritt 3: Sie ist für teilerfremde m, n injektiv.

Schritt 4: Sie definiert für teilerfremde m, n sogar einen Gruppenisomorphismus.

Wieso folgt nun die Behauptung? Wie können die Koeffizienten x und y zum Beispiel für $n = 13$ und $m = 17$ gewählt werden?