

Lineare Algebra I

Blatt 6

1 | Polynomdivision

Für welche der folgenden Paare von Polynomen A, B existiert in $\mathbb{Z}[X]$ eine Darstellung $A = QB + R$ mit $\deg(R) < \deg(B)$? Bestimmen Sie in diesen Fällen Q und R !

- (a) $A = X^7 + 3X^5 + 7X^4 + X^3 + X + 1, \quad B = X^3 + X + 1$
(b) $A = X^3 + X + 1, \quad B = X^7 + 3X^5 + 6$
(c) $A = X^8 + 4X^7 + 7X^4 - X^3 - X^2 - 1, \quad B = 2X^2 - 2X + 2$

Alle diese Polynome lassen sich auch als Elemente von $\mathbb{Q}[X]$ auffassen. Für welche der Polynome A und B existiert in $\mathbb{Q}[X]$ eine Darstellung $A = QB + R$ mit $\deg(R) < \deg(B)$? Bestimmen Sie auch in diesen Fällen Q und R !

2 | Ecce homo II

Wir werden in Def. 4.12 der Vorlesung sehen: Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen zwei K -Vektorräumen $(V, +, \odot)$ und $(W, +, \odot)$ ist **K -linear**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ und alle $r \in K$ gilt $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$ und $f(r \odot \mathbf{v}) = r \odot f(\mathbf{v})$.

Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$ -linear?

- (a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto 2 - 3x$ (b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3 - x^2$ (c) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ (d) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x^2/y & \text{falls } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases}$
(e) $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \quad A \mapsto X^2 \cdot A$ (f) $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} \quad A \mapsto A(7)$ (g) $\mathbb{R}[X] \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad A \mapsto \text{ev}(A)$

3 | Strukturwandel ★

Wie viele Abbildungen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gibt es? Wie viele Gruppenhomomorphismen? Wie viele Ringhomomorphismen?

4 | Flachwurzler ★

Welche Nullstellen hat das Polynom $X^3 - 3X^2 + 2X$ über $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?

Welche Nullstellen hat es über $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$?