

1 | Polynomdivision (10 Punkte)**AB JETZT 10 PUNKTE PRO AUFGABE**

Für welche der folgenden Paare von Polynomen A, B existiert in $\mathbb{Z}[X]$ eine Darstellung $A = QB + R$ mit $\deg(R) < \deg(B)$? Bestimmen Sie in diesen Fällen Q und R !

- (a) $A = X^7 + 3X^5 + 7X^4 + X^3 + X + 1, \quad B = X^3 + X + 1$
(b) $A = X^3 + X + 1, \quad B = X^7 + 3X^5 + 6$
(c) $A = X^8 + 4X^7 + 7X^4 - X^3 - X^2 - 1, \quad B = 2X^2 - 2X + 2$

Alle diese Polynome lassen sich auch als Elemente von $\mathbb{Q}[X]$ auffassen. Für welche der Polynome A und B existiert in $\mathbb{Q}[X]$ eine Darstellung $A = QB + R$ mit $\deg(R) < \deg(B)$? Bestimmen Sie auch in diesen Fällen Q und R !

(a) **4P** 3,5 P. - 0,5 P pro Rechenfehler
über $\mathbb{Z}$: Q $X^4 + 2X^2 + 6X - 1$

$$\begin{array}{r} (X^7 + 3X^5 + 7X^4 + X^3 + X + 1) : (X^3 + X + 1) \\ - (X^7 + X^5 + X^4) \\ \hline 2X^5 + 6X^4 + X^3 + X + 1 \\ - (2X^5 + 2X^3 + 2X^2) \\ \hline 6X^4 - X^3 - 2X^2 + X + 1 \\ - (6X^4 + 6X^2 + 6X) \\ \hline -X^3 - 8X^2 - 5X + 1 \\ - (-X^3 - X - 1) \\ \hline \text{R} \quad -8X^2 - 4X + 2 \end{array}$$

über $\mathbb{Q}$: 0,5 P Rechnung wie über $\mathbb{Z}$ mit demselben Ergebnis.

(b) **1P**

über $\mathbb{Z}$: $Q = 0, \quad R = A.$ 0,5 P

über $\mathbb{Q}$: $Q = 0, \quad R = A.$ 0,5 P

(c) 5P

über $\mathbb{Z}$: keine Division mit Rest möglich, da $2 \notin \mathbb{Z}^*$
↑
0,5P

$$B = 2x^2 - 2x + 2$$

über $\mathbb{Q}$: 4,5P. -0,5P pro Rechenfehler

$$\mathbb{Q} \left[\frac{1}{2}x^6 + \frac{5}{2}x^5 + 2x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x - \frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{array}{r} (x^8 + 4x^7 + 7x^4 - x^3 - x^2 - 1) : (2x^2 - 2x + 2) \\ \underline{-(x^8 - x^7 + x^6)} \\ 5x^7 - x^6 + 7x^4 - x^3 - x^2 - 1 \\ \underline{-(5x^7 - 5x^6 + 5x^5)} \\ 4x^6 - 5x^5 + 7x^4 - x^3 - x^2 - 1 \\ \underline{-(4x^6 - 4x^5 + 4x^4)} \\ -x^5 + 3x^4 - x^3 - x^2 - 1 \\ \underline{-(-x^5 + x^4 - x^3)} \\ 2x^4 - x^2 - 1 \\ \underline{-(2x^4 - 2x^3 + 2x^2)} \\ 2x^3 - 3x^2 - 1 \\ \underline{-(2x^3 - 2x^2 + 2x)} \\ -x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-(-x^2 + x - 1)} \\ -3x \end{array}$$

R -3x

2 | Ecce homo II (10 Punkte)

Wir werden in Def. 4.12 der Vorlesung sehen: Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen zwei K -Vektorräumen $(V, +, \odot)$ und $(W, +, \odot)$ ist **K -linear**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ und alle $r \in K$ gilt $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$ und $f(r \odot \mathbf{v}) = r \odot f(\mathbf{v})$.

Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$ -linear?

(a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2 - 3x$

(b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3 - x^2$

(c) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

(d) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x^2/y & \text{falls } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases}$

(e) $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $A \mapsto X^2 \cdot A$

(f) $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$
 $A \mapsto A(7)$

(g) $\mathbb{R}[X] \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
 $A \mapsto \text{ev}(A)$

(a) 1P nicht linear, denn $0 \mapsto 2 \neq 0$

(b) 1,5P nicht linear:

1	$\mapsto$	0
+		+
1	$\mapsto$	0
		$\neq$
2	$\mapsto$	4

(c) 1,5P linear: Neue Abb. f .

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y+y' \\ x+x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$f\left(r \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} r x \\ r y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} r y \\ r x \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = r \cdot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

(d) 1,5P nicht linear:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mapsto$	0
+		+
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\mapsto$	1
		$\neq$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\mapsto$	4

(e) (1,5P) linear: Nenne Abb. f

$$f(A+B) = X^2 \cdot (A+B) = X^2 \cdot A + X^2 \cdot B = f(A) + f(B)$$

Distributivität
im Polynomring

$$f(r \cdot A) = X^2 \cdot (r \cdot A) = r \cdot (X^2 \cdot A) = r \cdot f(A)$$

Kommutativität & Assoziativität
der Multiplikation im Polynom-
ring

Für volle Punktzahl reicht Rechnung
ODER Verweis auf Distributivität/
Kommutativität/Assoziativität im
Polynomring.

(f) (1,5P) linear: Nenne Abb. f .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für } r \in \mathbb{R}, \quad A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \\ \quad \quad \quad B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \end{array} \right\} \in \mathbb{R}[X]$$

gilt:

$$\begin{aligned} f(A+B) &= f\left(\sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) X^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) \cdot 7^i \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \cdot 7^i + \sum_{i=0}^m b_i \cdot 7^i \end{aligned}$$

$$= f(A) + f(B)$$

$$f(r \cdot A) = f\left(\sum_{i=0}^n r \cdot a_i x^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^n r \cdot a_i \cdot x^i$$

$$= r \cdot \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$$

$$= r \cdot f(A)$$

(g) 1,5P linear:

$ev(A+B) = ev(A) + ev(B)$, denn $\forall x \in \mathbb{R}$
gilt:

$$(ev(A+B))(x) = (ev A)(x) + (ev B)(x)$$

Wie in
Aufgaben-
teil (f)

notwendiger Verweis:
sonst ausführliche
Rechnung nötig
oder -0,25 P

$$= (ev(A) + ev(B))(x)$$

Def. von +
in $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
siehe Vorlesung
Beispiel (d) nach
Notiz 4.2

(optionale Begründung)

$\text{ev}(r \cdot A) = r \cdot \text{ev}(A)$ denn $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\text{ev}(r \cdot A))(x) = r \cdot (\text{ev} A(x))$$

Wie in
Aufgaben-
teil (f)

notwendiger Beweis:
sonst ausführliche
Rechnung nötig
oder -0,25 P

$$= (r \cdot \text{ev} A)(x)$$

Def. von $+$
in $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
siehe Vorlesung
Beispiel (d) nach
Notiz 4.2

(optionale Begründung)

Diesen letzten Aufgabenteil bitte
streng bewerten. Es ist leicht
etwas hinzuschreiben das
halbwegs richtig aussieht aber
bei näherer Betrachtung
wenig Sinn ergibt.

Aufgabe 3

Anzahl Abbildungen:

Für jedes der drei Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ haben wir sechs potentielle Bilder und somit $6^3 = 216$ Abbildungen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

2P

Anzahl Gruppenhomomorphismen:

Da Gruppenhomomorphismen neutrale Elemente auf neutrale Elemente abbilden, haben wir für $[0] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nur eine Wahl. An das Bild der $[1] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ haben wir nur die Einschränkung, dass drei mal das Bild $[0] \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ergeben muss, da $3[1] = [0] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Hier haben wir somit drei Wahlen $([0], [2], [4]) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Da $[2] = [1] + [1]$ und wir an Gruppenhomomorphismen interessiert sind, haben wir nun keine Wahl mehr, außer $[2]$ auf zwei mal das Bild von $[1] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ abzubilden.

Insgesamt also ^{höchstens} $1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$ Gruppenhomomorphismen von

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

5P

Tatsächlich: genau drei, gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ [u] & \longmapsto & [0] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ [u] & \longmapsto & [2u] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ [u] & \longmapsto & [4u] \end{array}$$

Es gibt keinen Ringhomo. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$,

denn ein solcher Ringhomo. f müsste einerseits
1 auf 1 abbilden, also

$$f([1]) = [1],$$

andererseits ein Gruppenhomomorphismus bzgl. + sein,
und wir haben oben gesehen

$$f([1]) \in \{[0], [2], [4]\}$$

für alle Gruppenhomomorphismen.

3P

Aufgabe 4

6 P { In $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: Direktes Nachrechnen liefert die Nullstellen
 $[0], [1], [2], [4], [5], [6], [8], [9], [10]$.
 $f([3]) \neq 0, f([7]) \neq 0, f([11]) \neq 0$

1 P { In $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z} = \mathbb{F}_{101}$:
Da $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ ein Körper ist, kann f höchstens drei Nullstellen in $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ besitzen.

Wir probieren auf gut Glück zunächst "kleine Werte" als Nullstellen aus:

3 P { $[0]([0]^2 - [3][0] + [2]) = [0]$
 $[1]([1]^2 - [3][1] + [2]) = [0]$
 $[2]([2]^2 - [3][2] + [2]) = [0]$

$\Rightarrow [0], [1], [2] \in \mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ sind die drei Nullstellen von f .