

Lineare Algebra I

Blatt 7

1 | Verpackungswahn

Seien V und W K -Vektorräume, seien $M, N \subseteq V$ und $O \subseteq W$ Teilmengen, und sei $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

- | | |
|---|---|
| (a) $\langle\langle M \rangle\rangle = \langle M \rangle$ | (c) $\langle f(M) \rangle = f(\langle M \rangle)$ |
| (b) $\langle M \cap N \rangle = \langle M \rangle \cap \langle N \rangle$ | (d) $\langle f^{-1}(O) \rangle = f^{-1}(\langle O \rangle)$ |

2 | Päckchen

Welche der folgenden Tupel in $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig? Welche sind Erzeugendensysteme? Welche sind Basen? Argumentieren Sie jeweils direkt mit den Definitionen (Def. 5.1), nicht mit den nachfolgenden Sätzen!

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ | (c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ | (e) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right)_{y \in \mathbb{R}}$ |
| (b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ | (d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ | |

3 | Auf und Ab ★

Die *formale Ableitung* eines Polynoms $A = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ ist gegeben durch $A' := \sum_{i \geq 1} i a_i X^{i-1}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $A \mapsto A'$ einen Endomorphismus auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ definiert.
- (b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild dieses Endomorphismus.

4 | Kreuzschlitz ★

Sei V ein Vektorraum mit Untervektorräumen W , V_1 , V_2 . Ist $W \subseteq V_1 \cup V_2$, so folgt bereits $W \subseteq V_1$ oder $W \subseteq V_2$.