

1 | Verpackungswahn (10 Punkte)

✓ K-VR

Seien V und W Vektorräume, seien $M, N \subseteq V$ und $O \subset W$ Teilmengen, und sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

(a) $\langle\langle M \rangle\rangle = \langle M \rangle$

(c) $\langle f(M) \rangle = f(\langle M \rangle)$

(b) $\langle M \cap N \rangle = \langle M \rangle \cap \langle N \rangle$

(d) $\langle f^{-1}(O) \rangle = f^{-1}(\langle O \rangle)$

(a) richtig 2,5 P

Allgemein gilt für jedes UVR U :
 $\langle U \rangle = U$.

Das ist klar aus der Charakterisierung von $\langle U \rangle$ als kleinstem UVR der U enthält:

Da $\langle M \rangle$ stets ein UVR ist folgt insbesondere:

$$\langle\langle M \rangle\rangle = \langle M \rangle$$

(Inklusion $\langle\langle M \rangle\rangle \supseteq \langle M \rangle$ folgt auch sofort aus $\langle M \rangle \supseteq M$ und Def. von $\langle - \rangle$.)

(b) falsch 2,5 P

Wähle z.B. $V = \mathbb{R}$, $M = \{1\}$, $N = \{2\}$

$$\langle M \cap N \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$$

$$\langle M \rangle \cap \langle N \rangle = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

(c) richtig 2,5 P

$$(\subseteq) \quad \underline{v} \in \langle f(M) \rangle$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \sum_{i=1}^n s_i f(\underline{v}_i) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und gewisse } s_i \in K$$

$$\stackrel{f \text{ linear}}{=} f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n s_i \underline{v}_i}_{\in \langle M \rangle}\right)$$

$$\in f(\langle M \rangle)$$

$$(\supseteq) \quad \underline{v} \in f(\langle M \rangle)$$

$$\Rightarrow \underline{v} = f\left(\sum_{i=1}^n s_i \underline{v}_i\right) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und gewisse } s_i \in K$$

$$\stackrel{f \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^n s_i \underbrace{f(\underline{v}_i)}_{\in f(M)} \in \langle f(M) \rangle$$

(d) falsch 2,5 P

Wähle z.B. $V = \mathbb{R}$
 $W = \{0\}, \quad \emptyset = \emptyset$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \{0\}$$
$$x \longmapsto \underline{0}$$

$$\langle f^{-1}(\emptyset) \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$$

$$f^{-1}(\langle \emptyset \rangle) = f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$$

Keine Punkte ohne Beweis
Gegenbeispiel

2 | Päckchen (10 Punkte)

Welche der folgenden Tupel in $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig? Welche sind Erzeugendensysteme? Welche sind Basen? Argumentieren Sie jeweils direkt mit den Definitionen (Def. 5.1), nicht mit den nachfolgenden Sätzen!

(a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

(e) $(\mathbf{v})_{\mathbf{v} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}}$

(b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

(d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

jeweils (ΣP) je Aufgabenteil:

1P für linear (un)abhängig
1P für Erzeugendensystem

(a) linear unabhängig:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \textcircled{1} \\ \text{und } a + 2b = 0 & \textcircled{2} \\ \text{und } a - 2b = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

① eingesetzt in ② liefert:

$$b = 0$$

Kein Erzeugendensystem:

$$\text{Ist } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{also } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a + 2b \\ a - 2b \end{pmatrix},$$

so ist $x + y + z = 3x$. Daher z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) linear unabhängig:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2b = 0 \\ 3c = 0 \end{cases}$$

Also $a = b = c = 0$

Erzeugendensystem:

Jeden Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) linear unabhängig:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 & \textcircled{1} \\ a + 2c = 0 & \textcircled{2} \\ a - 2c = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b & \textcircled{1} \\ 2a = 0 & (\textcircled{2} + \textcircled{3}) \\ 4c = 0 & (\textcircled{2} - \textcircled{3}) \end{cases}$$

Also $a = b = c = 0$.

Erzeugendensystem:

②

$$\text{Ansatz: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = x & \textcircled{1} \\ a + 2c = y & \textcircled{2} \\ a - 2c = z & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = x & \textcircled{1} \\ 2a = y + z & \textcircled{2} + \textcircled{3} \\ 4c = y - z & \textcircled{2} - \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}(y+z) \\ b = a - x = \frac{1}{2}(y+z) - x \\ c = \frac{1}{4}(y-z) \end{cases}$$

Wenn Lösung hier endet, $-\frac{1}{4}P$
(dann nötige Implikation " $\Leftarrow$ " ist bei
derartigen Umformungen unklar.)

①

Lösung: Für beliebiges $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(y+z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}(y+z) - x \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(y-z) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ & \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}(y+z) - \frac{1}{2}(y+z) + x \\ \frac{1}{2}(y+z) + \frac{2}{4}(y-z) \\ \frac{1}{2}(y+z) - \frac{2}{4}(y-z) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) nicht linear unabhängig,
z.B.

$$1. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erzeugendensystem,

da bereits $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

Erzeugendensystem ist (Teil (b)).

(e) nicht linear unabhängig,
z.B. 1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

kein Erzeugendensystem:

Für jeden Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \langle (\underline{v})... \rangle$

ist $a=0$, daher z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle (\underline{v})... \rangle$.

Aufgabe 3

Setze $\partial: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $\sum_{i \geq 0} a_i x^i \mapsto \sum_{i \geq 1} i a_i x^{i-1}$

(a) seien $\sum_{i \geq 0} a_i x^i, \sum_{i \geq 0} b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gelten

$$\begin{aligned}\partial\left(\sum_{i \geq 0} a_i x^i + \sum_{i \geq 0} b_i x^i\right) &= \partial\left(\sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) x^i\right) \\ &= \sum_{i \geq 1} i(a_i + b_i) x^{i-1} \\ &= \left(\sum_{i \geq 1} i a_i x^{i-1}\right) + \left(\sum_{i \geq 1} i b_i x^{i-1}\right) \\ &= \partial\left(\sum_{i \geq 0} a_i x^i\right) + \partial\left(\sum_{i \geq 0} b_i x^i\right)\end{aligned}$$

2,5P

und

$$\begin{aligned}\partial\left(\lambda \sum_{i \geq 0} a_i x^i\right) &= \partial\left(\sum_{i \geq 0} (\lambda a_i) x^i\right) = \sum_{i \geq 1} i(\lambda a_i) x^{i-1} \\ &= \lambda \sum_{i \geq 1} i a_i x^{i-1} \\ &= \lambda \partial\left(\sum_{i \geq 0} a_i x^i\right),\end{aligned}$$

2,5P

sodass ∂ ein Endomorphismus von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen ist.

(5)

$$\ker(\partial) = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i x^i \in \mathbb{R}(x) \mid \underbrace{\partial \left(\sum_{i \geq 0} a_i x^i \right)}_{\sum_{i \geq 1} i a_i x^i} = 0 \right\}$$

Ist also $\sum_{i \geq 0} a_i x^i$ im Kern von ∂ , so muss
 $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ gelten, sodass

$$\sum_{i \geq 0} a_i x^i = a_0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}(x).$$

Andersherum ist $\partial(a_0) = 0$ für $a_0 \in \mathbb{R}$ und
wir erhalten $\ker(\partial) = \{a_0 \in \mathbb{R}(x) \mid a_0 \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$

2,5P

Das Bild ^{von ∂} ist ganz $\mathbb{R}(x)$:

Sei $\sum_{i \geq 0} a_i x^i \in \mathbb{R}(x)$ und betrachte das Element

$\sum_{i \geq 0} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} \in \mathbb{R}(x)$. Dann gilt

$$\partial \left(\sum_{i \geq 0} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} \right) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i.$$

2,5P

Aufgabe 4 max. 10 P.

Angenommen, $W \not\subset V_1$ und $W \not\subset V_2$. Dann existieren $w_1 \in W \setminus V_1$ und $w_2 \in W \setminus V_2$. Da $W \subset V_1 \cup V_2$, müssen also $w_1 \in V_2$ und $w_2 \in V_1$ gelten. Nun ist W als UVR abgeschlossen unter Vektoraddition, sodass $w_1 + w_2 \in W \subset V_1 \cup V_2$.

Es gilt also $w_1 + w_2 \in V_1$ oder $w_1 + w_2 \in V_2$.

Im ersten Fall erhalten wir

$$w_1 = \underbrace{w_1 + w_2}_{\in V_1} - \underbrace{w_2}_{\in V_1} \in V_1 \quad \downarrow$$

und im zweiten Fall analog

$$w_2 = \underbrace{w_1 + w_2}_{\in V_2} - \underbrace{w_1}_{\in V_2} \in V_2 \quad \downarrow$$

Somit war unsere Annahme falsch, sodass $W \subset V_1$ oder $W \subset V_2$.

