

1 | Suchbild (10 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$ -linear?

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2 \\ 0 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

$$j: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ 3y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zu den $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen jeweils die Dimension des Kerns und des Bildes, indem Sie eine explizite Basis von Kern und Bild angeben. (Sie sollten natürlich auch nachweisen, dass die von Ihnen angegebenen Tupel tatsächlich Basen sind.)

f linear: 1 P

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y+y' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \\ f\left(s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} sx \\ sy \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ sy \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

[Alternativ:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ also } f \text{ linear nach Satz 6.3}$$

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ hat Basis } \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \text{ also}$$

einzelner Vektor $\neq 0$
ist linear unabhängig

$$\dim(\ker(f)) = 1. \text{ 1 P}$$

$$\operatorname{im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ hat Basis } \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \text{ also}$$

einzelner Vektor $\neq 0$
ist linear unabhängig

$$\dim(\operatorname{im}(f)) = 1. \text{ 1 P}$$

g linear: 1 P

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+x'+y+y' \\ x+x'+y+y' \\ x+x'+y+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+x'+y' \\ x+y+x'+y' \\ x+y+x'+y' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'+y' \\ x'+y' \end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$$

$$g\left(s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} sx \\ sy \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} sx+sy \\ sx+sy \\ sx+sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot (x+y) \\ s \cdot (x+y) \\ s \cdot (x+y) \end{pmatrix} \\ = s \cdot \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix} = s \cdot g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

[Alternativ: $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$]

$$\ker(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0 \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ hat Basis } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \text{ also}$$

einzelner Vektor $\neq 0$
ist linear unabhängig

$$\dim(\ker(g)) = 1. \text{ 1 P}$$

einzelner Vektor $\neq 0$
ist linear unabhängig

$$\operatorname{im}(g) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ hat Basis } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{ also}$$

$$\dim(\operatorname{im}(g)) = 1. \text{ 1 P}$$

h ist nicht linear: $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$ 1 P

f ist linear: 1 P

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x+x') - (y+y') \\ 3(y+y') \\ (x+x') + 2(y+y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x-y + 2x'-y' \\ 3y + 3y' \\ x+2y + x'+2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ 3y \\ x+2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x'-y' \\ 3y' \\ x'+2y' \end{pmatrix}$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$$

$$f\left(s \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} sx \\ sy \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2sx - sy \\ 3sy \\ sx + 2sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot (2x - y) \\ s \cdot 3y \\ s \cdot (x + 2y) \end{pmatrix} \\ = s \cdot \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y \\ x + 2y \end{pmatrix} = s \cdot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

[Alternativ: $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$]

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \wedge \underline{3y = 0} \wedge x + 2y = 0 \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 0 \wedge x = 0 \right\} \\ = \{ \underline{0} \} \quad \text{hat Basis } () \quad (\text{leeres Tupel})$$

also $\dim(\ker(f)) = 0$. 1 P

$$\operatorname{im}(f) = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

hat Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, denn

$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ ist linear unabhängig:

$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2s_1 - s_2 \\ 3s_2 \\ s_1 + 2s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s_2 = 0 \wedge s_1 = 0.$$

[Alternativ:

$$\dim(\operatorname{im}(f)) = 2 - 0 = 2$$

nach Rangsatz, also
ist jedes Erzeugendensystem mit 2 Elementen
eine Basis

Daher: $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2$. (1 P)

[Nicht mehr existenter Aufgabenteil: ]

Jeweils nur $\frac{1}{4}P$ statt 1 P bei Angabe der Dimension ohne Basis. Begründungen zu linearer Unabhängigkeit dürfen so kurz wie in dieser Lösung, aber nicht noch kürzer sein.

2 | Spielverderber (10 Punkte)

In einem reellen Vektorraum seien Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ gegeben. Ferner seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &:= 2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_2 &:= \quad \quad - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_3 &:= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_4 &:= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_5 &:= \mathbf{u}_1 \quad \quad \quad - \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4\end{aligned}$$

Ist das Tupel $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5)$ linear unabhängig?

Alternative A:

Nein:

$\dim(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4) \leq 4$ nach Basisauswahlsatz. (3 P)

Falls $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5)$ linear unabhängig, folgt andererseits nach Basisergänzungssatz: $\dim(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5) \geq 5$. (3 P)

Es ist aber per Def. $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4 \rangle$ für jedes i , somit

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5 \rangle \subseteq \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4 \rangle, \quad (2 P)$$

und somit (nach Basisergänzungssatz)

$$5 \leq \dim(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5) \leq \dim(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4) \leq 4 \quad (+1 P)$$

Also $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5)$ linear abhängig. ⚡ (1 P)

□

Alternative B:

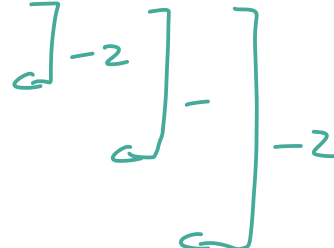
Ausatz:

$$s_1 \cdot \underline{v}_1 + s_2 \cdot \underline{v}_2 + s_3 \cdot \underline{v}_3 + s_4 \cdot \underline{v}_4 + s_5 \cdot \underline{v}_5 = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2s_1 + s_3 + s_4 + s_5) \underline{u}_1 = 0 \\ 1(2s_1 - s_2 + s_3 + s_4) \underline{u}_2 = 0 \\ 1(s_1 + s_2 + 3s_3 + s_4 - s_5) \underline{u}_3 = 0 \\ 1(-s_1 - s_2 - s_3 + s_4 + s_5) \underline{u}_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2s_1 + s_3 + s_4 + s_5 = 0 \\ 1 \quad 2s_1 - s_2 + s_3 + s_4 = 0 \\ 1 \quad s_1 + s_2 + 3s_3 + s_4 - s_5 = 0 \\ 1 \quad -s_1 - s_2 - s_3 + s_4 + s_5 = 0 \end{cases}$$


(3 Punkte für diesen Ansatz bis hier)

$$\begin{array}{rcl} s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 & = & 0 \\ 2s_1 - s_2 + s_3 + s_4 & = & 0 \\ s_1 + s_2 + 3s_3 + s_4 - s_5 & = & 0 \\ 2s_1 + s_3 + s_4 + s_5 & = & 0 \end{array}$$


$$\begin{array}{rcl} s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 & = & 0 \\ -3s_2 - s_3 + 3s_4 + 2s_5 & = & 0 \quad | \cdot -\frac{1}{3} \\ 2s_3 + 2s_4 & = & 0 \quad | \cdot \frac{1}{2} \\ -2s_2 - s_3 + 3s_4 + 3s_5 & = & 0 \quad | \cdot \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 & = & 0 \\
 s_2 + \frac{1}{3}s_3 - s_4 - \frac{2}{3}s_5 & = & 0 \\
 s_3 + s_4 & = & 0 \\
 -s_2 - \frac{1}{2}s_3 + \frac{3}{2}s_4 + \frac{3}{2}s_5 & = & 0
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \leftarrow - \\ \leftarrow + \end{array} \right\}$

$$\begin{array}{rcl}
 s_1 + \frac{2}{3}s_3 - \frac{1}{3}s_5 & = & 0 \\
 s_2 + \frac{1}{3}s_3 - s_4 - \frac{2}{3}s_5 & = & 0 \\
 s_3 + s_4 & = & 0 \\
 -\frac{1}{6}s_3 + \frac{1}{2}s_4 + \frac{5}{6}s_5 & = & 0
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \leftarrow -\frac{2}{3}s_3 \\ \leftarrow -\frac{1}{3}s_3 \end{array} \right\} + \frac{1}{6}$

$$\begin{array}{rcl}
 s_1 - \frac{2}{3}s_4 - \frac{1}{3}s_5 & = & 0 \\
 s_2 - \frac{4}{3}s_4 - \frac{2}{3}s_5 & = & 0 \\
 s_3 + s_4 & = & 0 \\
 \frac{2}{3}s_4 + \frac{5}{6}s_5 & = & 0
 \end{array}$$

$\left| \cdot \frac{3}{2} \right.$

$$\begin{array}{rcl}
 s_1 - \frac{2}{3}s_4 - \frac{1}{3}s_5 & = & 0 \\
 s_2 - \frac{4}{3}s_4 - \frac{2}{3}s_5 & = & 0 \\
 s_3 + s_4 & = & 0 \\
 s_4 + \frac{5}{4}s_5 & = & 0
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \leftarrow +\frac{4}{3}s_4 \\ \leftarrow - \end{array} \right\} + \frac{2}{3}$

$$\begin{array}{rcl}
 s_1 + \frac{1}{2}s_5 & = & 0 \\
 s_2 + s_5 & = & 0 \\
 s_3 - \frac{5}{4}s_5 & = & 0 \\
 s_4 + \frac{5}{4}s_5 & = & 0
 \end{array}$$

Wähle nun z.B. $s_5 = 4$.

Dann ergibt sich:

$$s_1 = -2$$

$$s_2 = -4$$

$$s_3 = 5$$

$$s_4 = -5$$

-0,5 Punkte
je Rechenfehler

Behauptung daher:

$$-2\underline{v}_1 - 4\underline{v}_2 + 5\underline{v}_3 - 5\underline{v}_4 + 4\underline{v}_5 = \underline{0}$$

Das lässt sich leicht nachrechnen und zeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind.

Falls Herleitung fehlt, sollte zumindest diese Rechnung verschriftlicht sein

3 | Zweikammersystem ★

Zeigen Sie, dass für Teilmengen A_1, A_2 einer Menge M und Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V gilt:

$$\begin{array}{lll} A_1 \cap A_2 = \emptyset & \Rightarrow & A_1 \cup A_2 \cong A_1 \sqcup A_2 & 4P \\ U_1 \cap U_2 = \{0\} & \Rightarrow & U_1 + U_2 \cong U_1 \oplus U_2 & 4P \end{array}$$

Weisen Sie ferner durch geeignete Gegenbeispiele nach, dass die Annahmen jeweils notwendig sind!
1P + 1P

Definiere $f: A_1 \sqcup A_2 \longrightarrow A_1 \cup A_2$.

$$(a, i) \longmapsto a$$

f surjektiv. Für jedes $a \in A_1 \cup A_2$ gilt:
 $a \in A_1$ oder $a \in A_2$.

Also hat a Urbild $(a, 1)$ oder $(a, 2)$.

f injektiv falls $A_1 \cap A_2 = \emptyset$:

Ist $f(a, i) = f(a', i')$, so ist $a = a'$.

Nach Annahme $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gibt es höchstens ein $j \in \{1, 2\}$ mit $a \in A_j$.
Also ist notw. $i = j = i'$.

Also $(a, i) = (a', i')$.

Ohne die Annahme $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ist i. A.

$A_1 \sqcup A_2 \not\cong A_1 \cup A_2$, z.B. gilt für $A_1 = \{*\} = A_2$:

$$|A_1 \sqcup A_2| = 2 \neq 1 = |A_1 \cup A_2|$$

Definiere $f: U_1 \oplus U_2 \longrightarrow U_1 + U_2$
 $(u_1, u_2) \longmapsto u_1 + u_2$

f surjektiv. Nach Notiz 4.11 ist jeder Vektor in $U_1 + U_2$ von der Form $u_1 + u_2$ für ein $u_1 \in U_1$ und ein $u_2 \in U_2$. Somit ist (u_1, u_2) ein Urbild von $u_1 + u_2$.

f injektiv, falls $U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$:

Nach Injektivitätskriterium 4.17 reicht es zu zeigen: $f(u_1, u_2) = \underline{0} \Rightarrow (u_1, u_2) = (\underline{0}, \underline{0})$.

Sei also $(u_1, u_2) \in U_1 \oplus U_2$ derart, dass

$$f(u_1, u_2) = \underline{0}.$$

Dann ist $u_2 = -u_1$, und daher $u_2 \in U_1$.

Somit $u_2 \in U_1 \cap U_2$, also nach Annahme

$$u_2 = \underline{0}.$$

Es folgt $u_1 = -u_2 = \underline{0}$,

also $(u_1, u_2) = (\underline{0}, \underline{0})$.

Ohne die Annahme $U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$ ist i.A. $U_1 \oplus U_2 \neq U_1 + U_2$.

Zum Beispiel gilt für $U_1 = \mathbb{R} = U_2$:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \oplus U_2) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$$

Somit $U_1 \oplus U_2 \neq U_1 + U_2$ nach Dimensionssatz.

4 | Warum summarum? ★

Seien V und W , und ferner V_i und W_i für jedes i aus einer Indexmenge I , K -Vektorräume. Seien $\iota_j: V_j \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i$ und $\pi_j: \prod_{i \in I} W_i \rightarrow W_j$ die kanonischen Inklusionen und Projektionen aus Notiz 4.20.

- (a) Zeigen Sie, dass zu jeder Familie K -linearer Abbildungen $f_i: V \rightarrow W_i$ ($i \in I$) genau eine K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow \prod_{i \in I} W_i$ existiert mit $\pi_j \circ f = f_j$ für jedes $j \in I$. 3P
- (b) Zeigen Sie, dass zu jeder Familie K -linearer Abbildungen $f_i: V_i \rightarrow W$ ($i \in I$) genau eine K -lineare Abbildung $f: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$ existiert mit $f \circ \iota_j = f_j$ für jedes $j \in I$. 3P
- (c) Bleibt die Aussagen in (a) richtig, wenn wir das Produkt durch die Summe ersetzen? 2P
- (d) Bleibt die Aussagen in (b) richtig, wenn wir die Summe durch das Produkt ersetzen? 2P

(a)

Definiere

$$f: V \rightarrow \prod_{i \in I} W_i, \quad v \mapsto (f_i(v))_{i \in I}.$$

Dann ist f K -linear, da f_i für alle $i \in I$ K -linear sind. Zudem gilt.

Studenten
hier ganz
etwas aus-
führlicher

$$\pi_j \circ f(v) = \pi_j((f_i(v))_{i \in I}) = f_j(v)$$

für alle $v \in V$ und $j \in I$. Ist nun $g: V \rightarrow \prod_{i \in I} W_i$ eine weitere solche lin. Abbildung, d.h. es gilt $\pi_j \circ g = f_j$ für alle $j \in I$, so erhalten wir

$$\pi_j \circ f(v) = f_j(v) = \pi_j \circ g(v)$$

für alle $v \in V$ und $j \in I$. Somit stimmen die j -ten Einträge von $f(v)$ und $g(v)$ für alle $j \in I$ und $v \in V$ überein, sodass $f = g$. Somit ist eine solche Abbildung eindeutig.

(b)

Definiere

$$f: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W, \quad (v_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i(v_i)$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da Elemente von $\bigoplus_{i \in I} V_i$ nur endlich viele Nichtnull-Einträge besitzen und lineare Abbildungen Nullen erhalten. Zudem ist f K -linear, da die f_i K -linear sind.

Nun gilt

$$f \circ i_j(v_j) = f(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{v_j}, 0, \dots) = f_j(v_j)$$

für alle $v_j \in V_j$ und $j \in I$. Ist $g: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$ noch so eine K -Abbildung, d.h. es gilt $g \circ i_j = f_j$ für alle $j \in I$, so erhalten wir, dass aufgrund von

$$g \circ i_j(v_j) = f_j(v_j) = f \circ i_j(v_j)$$

für alle $v_j \in V_j$ und $j \in I$, die Abbildungen f und g auf Elementen der Form $(0, \dots, 0, v_j, 0, \dots)$ übereinstimmen. Somit stimmen f und g aufgrund der Linearität auf allen Elementen von $\bigoplus_{i \in I} V_i$ überein, sodass ein solches f eindeutig ist.

(c)

(a) bleibt nicht richtig, wenn wir $\overline{\Pi}$ durch $\oplus$ ersetzen: Wähle $I = \mathbb{N}$, $V = \mathbb{R}$, $W_n = \mathbb{R}$

$$f_n := \mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{R}$$

$\mathbb{K}$ -lin. Abb. $f: \mathbb{R} \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$,

Ang., es gäbe eine mit

$$\pi_n \circ f = f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da dann $\pi_n \circ f(1) = f_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten muss, kann $f(1)$ nicht in $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ liegen (unendlich viele Einträge sind $\neq 0$)

Somit kann es kein solches f geben.

(d) Aussage (b) bleibt nicht richtig, wenn wir $\oplus$ durch Π ersetzen – Eindeutigkeit scheitert:

Wähle I, V, W_i, f_i wie in (c).

Durch die in (b) angegebene Bedingung ist

$$f: \Pi_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Unterraum $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R} \subseteq \Pi_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$

eindeutig festgelegt – für die Standardbasis $(\underline{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ muss gelten $f(\underline{e}_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ergänze die Standardbasis mittels Basisergänzungssatz zu einer Basis $(\underline{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \underline{v}_i (i \in I)$ von $\Pi_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$.

Da $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R} \neq \Pi_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$, gibt es mindestens einen ergänzten Basisvektor $\underline{v}_{i_0}$.

Definiere $\mathbb{R}$ -lineare Abb.

$$\begin{aligned} f_1: \Pi_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{durch } \underline{e}_n &\mapsto 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \underline{v}_i &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i = i_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } f_2: \Pi_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{durch } \underline{e}_n &\mapsto 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \underline{v}_i &\mapsto 0 \quad (\forall i \in I) \end{aligned}$$

Dann erfüllen sowohl f_1 als auch f_2 die in (b) geforderte Eigenschaft:

