

Lineare Algebra I

Blatt 9

1 | Kastenwesen

Welche Matrizen stellen die folgenden linearen Abbildungen f , g , h und ihre Kompositionen $g \circ f$, $h \circ g$ und $h \circ g \circ f$ dar?

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ 3x + 2y - z \\ z + 7x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z - 3w \\ y - 3w \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x - y \end{pmatrix}$$

2 | Rank and File

Welche der durch die folgenden Matrizen definierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind injektiv?
Welche surjektiv?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei einigen Fragen hilft die Rangformel 5.17. Ansonsten können/dürfen/sollen Sie auf diesem Aufgabenblatt einfach die Definitionen verwenden und losrechnen. Im Laufe des Semesters werden wir weitere Sätze und Verfahren kennenlernen, diese Art von Aufgabe effizient anzugehen.

3 | Erbsenzählen ★

Beweisen Sie:

- Ein \mathbb{F}_p -Vektorraum der Dimension n hat p^n Elemente.
- Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind kein endlich-dimensionaler \mathbb{Q} -Vektorraum.

Sie dürfen verwenden, dass ein endliches Produkt endlich vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist, und dass \mathbb{R} überabzählbar ist.

4 | Grenzen des Wachstums ★

Eine Fahne der Länge d in einem Vektorraum V ist eine Kette von Untervektorräumen von V der Form $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$. (Die Notation $A \subsetneq B$ bedeutet $A \subseteq B$ aber $A \neq B$). Zeigen Sie, dass für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V die maximale Länge einer solchen Fahne gleich der Dimension von V ist.