1 | Kastenwesen

Welche Matrizen stellen die folgenden linearen Abbildungen f, g, h und ihre Kompositionen $g \circ f$, $h \circ g$ und $h \circ g \circ f$ dar?

$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ 3x + 2y - z \\ z + 7x \end{pmatrix} \qquad M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z - 3w \\ y - 3w \end{pmatrix} \qquad M(g) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x - y \end{pmatrix} \qquad M(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$M(g \circ f) = \,?$

Option A:

$$g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ 3x + 2y - z \\ z + 7x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 7x - 3 \cdot (x - y) \\ 3x + 2y - z - 3 \cdot (x - y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x + 3y + z \\ 5y - z \end{pmatrix},$$

also: $$M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Option B:

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter mit Option B:

$$M(h\circ g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(h\circ g\circ f) = M(h) \cdot M(g\circ f)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2 | Rank and File

Welche der durch die folgenden Matrizen definierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sind injektiv? Welche surjektiv?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Injektivität – keine der Abb. ist injektiv:

Rangformel 5.17 für lineare Abb. $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ besagt:

$$rk(f) = 4 - \dim(\ker f).$$

Da $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$, ist andererseits $rk(f) \leq 3$.

Also ist

$$\dim(\ker f) \geq 1.$$

Insbesondere ist $\ker f \neq \{\underline{0}\}$, somit f nach Injektiv-Kriterium nicht injektiv.

Surjektivität von f_A

kürzeste Option: Rang bestimmen mit Rezept 6.27

[Anmerkung: Dieser Weg stand noch nicht zur Verfügung, als Aufgabe gestellt wurde.]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad - \text{ ZSF}$$

$rk(A) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, also ist $\mathrm{im}\, f_A = \mathbb{R}^3$,

also f_A surjektiv.

Option direktes Nachrechnen

[Anmerkung: Dieser Weg stand bei Aufgabenstellung zur Verfügung, auch wenn das konkrete Rechenverfahren und die Notation, die in dieser Musterlösung verwendet werden, erst später eingeführt wurden.]

f_A ist surjektiv, falls

$$f_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

für beliebiges $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung besitzt, wenn also

$$\mathcal{L}\left(A, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$$

nicht leer ist. Verwende hierzu z.B. Rezept 6.28:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 2 & -1 & a \end{array}\right)$$

Die ZSF hat keine Nullzeilen, also ist

$$\mathcal{L}\left(A, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) \neq \emptyset.$$

und somit f_A surjektiv.

Surjektivität von f_B (kürzeste Option)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-\tfrac{1}{2})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \cdot 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}(B) = 2 < 3$, also ist f_B nicht surjektiv.

Surjektivität von f_C (kürzeste Option)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdot (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}(C) = 3$, also ist f_C surjektiv.

3 | Erbsenzählen ★

Beweisen Sie:

(a) Ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum der Dimension n hat p^n Elemente.
(b) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind kein endlich-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Sie dürfen verwenden, dass ein endliches Produkt endlich vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist, und dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

(a) Für $\mathbb{F}_p$-VR V der Dimension n gilt nach dem Hauptsatz:

$$V \cong (\mathbb{F}_p)^n = \underbrace{\mathbb{F}_p \times \dots \times \mathbb{F}_p}_{n \text{ Faktoren}}$$

Also ist

$$|V| = |(\mathbb{F}_p)^n| = |\mathbb{F}_p|^n = p^n .$$

(b) Wäre $\mathbb{R}$ endlich-dim. als $\mathbb{Q}$-VR, würde analog gelten:

$$\mathbb{R} \cong \mathbb{Q}^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}$$

(als $\mathbb{Q}$-VR, also erst recht als Menge).

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, würde hieraus folgen, dass auch $\mathbb{R}$ abzählbar ist $\lightning$ (Bsp. 1.25 (e))

4 | Grenzen des Wachstums ★

Eine *Fahne der Länge* d in einem Vektorraum V ist eine Kette von Untervektorräumen von V der Form $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subsetneq U_d$. (Die Notation $A \subsetneq B$ bedeutet $A \subseteq B$ aber $A \neq B$). Zeigen Sie, dass für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V die maximale Länge einer solchen Fahne gleich der Dimension von V ist.

Maximale Länge $\geq$ dim V:

Sei $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_d)$ eine Basis von V, also $d = \dim V$.

Betrachte

$$\mathcal{U}_0 := \langle () \rangle = \{0\}$$
$$\mathcal{U}_1 := \langle \underline{v}_1 \rangle$$
$$\mathcal{U}_2 := \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{U}_d := \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_d \rangle$$

Dann ist jeweils $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_{i+1}$, aber $\mathcal{U}_i \neq \mathcal{U}_{i+1}$.

(Mögliche Argumente für $\mathcal{U}_i \neq \mathcal{U}_{i+1}$ z.B.:

- $\underline{v}_{i+1} \in \mathcal{U}_{i+1}$, aber $\underline{v}_{i+1} \notin \mathcal{U}_i$
- jeweils $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_i)$ Basis von $\mathcal{U}_i$,
  also $\dim \mathcal{U}_i = i$; insbes. $\dim \mathcal{U}_i \neq \dim \mathcal{U}_{i+1}$.)

Also def. $\mathcal{U}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{U}_d$ Fahne der Länge $d = \dim V$.

Maximale Länge $\leq$ dim V:

Sei $\mathcal{U}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{U}_d$ Fahne maximaler Länge.

Da jeweils $\mathcal{U}_i \subsetneq \mathcal{U}_{i+1}$, ist $\dim \mathcal{U}_i < \dim \mathcal{U}_{i+1}$

(Dimensionsformel 5.14 (a)), also $\dim \mathcal{U}_i + 1 \leq \dim \mathcal{U}_{i+1}$

Insgesamt folgt:

$$\dim \mathcal{U}_0 + d \leq \dim \mathcal{U}_d$$

Andererseits ist $0 \leq \dim \mathcal{U}_0$ und $\dim \mathcal{U}_d \leq \dim V$.

Also folgt:

$$d \leq \dim V$$

für jede Fahne $\mathcal{U}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{U}_d$

$\square$