

1 | Kastenwesen

Welche Matrizen stellen die folgenden linearen Abbildungen f , g , h und ihre Kompositionen $g \circ f$, $h \circ g$ und $h \circ g \circ f$ dar?

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ 3x + 2y - z \\ z + 7x \end{pmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z - 3w \\ y - 3w \end{pmatrix}$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$f: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1, 5)$$

$$g: \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1, 5)$$

$$h: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1, 5)$$

$g \circ f$: **OPTION A:**

$$g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ 3x + 2y - z \\ z + 7x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z + 7x - 3(x - y) \\ 3x + 2y - z - 3(x - y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x + 3y + z \\ 5y - z \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ Matrix zu $g \circ f$ ist $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

OPTION B:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$h \circ g$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f):$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (1,5)$$

In dieser Aufgabe ausnahmsweise volle Punktzahl für richtige Ergebnisse.

Jeweils -0,5P für falschen Eintrag.

2 | Großes ABC

Welche der durch die folgenden Matrizen definierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind injektiv?
Welche surjektiv?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Injektivität: 2,5

Keine der Abbildungen ist injektiv, denn nach der Rangformel und dem Injektivitätskriterium gibt es keine injektiven linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$. 1P 1P 5.17

(Für lineares $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$\operatorname{rk} f + \dim(\ker f) = 4$$

und $\operatorname{rk} f \leq 3,$

also $\dim(\ker f) \geq 1.$)

(Alternativ:

1 Punkt für jede Abbildung, für die Nicht-Injektivität korrekt gezeigt wurde, aber höchstens 2,5 Punkte.)

Option K:

$$\ker(f_A) = \mathcal{L}(A)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \swarrow \searrow \\ \swarrow \searrow \end{array} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \swarrow -3 \\ \swarrow -3 \end{array} \quad | \cdot \frac{1}{2} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \swarrow (-1) \swarrow -2 \\ \swarrow (-1) \swarrow -2 \end{array} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & +\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & +\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \downarrow \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & +\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & +\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Also ist

$$\ker(f_A) = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{insbesondere}$$

$$\dim \ker(f_A) = 1.$$

Nach Rangformel folgt:

$$\text{rk}(f_A) = 3, \text{ also } f_A \text{ surjektiv.}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 2 & -1 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow -3 \\ \updownarrow -3 \end{array} \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & b-3c \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}a \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & a+b-3c \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & c-\frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}a \end{array} \right)$$

— Lösung existiert ✓

Option D: Direktes Nachrechnen.

Sei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Ausatz: $f_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \mathcal{L}(A, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$

$$\begin{array}{rcl} & 2y - z & = a & | \cdot \frac{1}{2} \\ w + 3x + & y + 2z & = b & \leftarrow -3 \\ & x + y - z & = c \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & y - \frac{1}{2}z & = \frac{1}{2}a \\ w & -2y + 5z & = b - 3c & \leftarrow +2 \\ & x + y - z & = c & \leftarrow -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & y - \frac{1}{2}z & = \frac{1}{2}a \\ w & + 4z & = a + b - 3c \\ x & - \frac{1}{2}z & = -\frac{1}{2}a + c \end{array}$$

Wähle nun z.B. $z = 2$ und löse nach w, x, y auf. Ergebnis:

$$f_A \begin{pmatrix} a + b - 3c - 8 \\ -\frac{1}{2}a + c + 1 \\ \frac{1}{2}a + 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Option 12: Rang bestimmen
mit Rezept 6.27

NEU

(Das gibt keine Punkte für das
Blatt, da Rezept 6.27 zum Zeit-
punkt der Bearbeitung noch nicht
bekannt war, aber es gäbe Punkte
in der Klausur)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \curvearrowright \\ \downarrow \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 3 & 1 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \text{Rang}(f_A) = \text{Rang}(A) = 3.$
Also ist f_A surjektiv.

f_B nicht surjektiv (2,5)

(Ich diskutiere hier nur Option B.)

Sei $f_B \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} -2x + y - 2z & = & a \\ -2w + x & + & z = b \\ -2w - x + y - z & = & c \end{array} \quad \begin{array}{l} | -1 \\ \downarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -2x + y - 2z & = & a \\ 2w - x & - & z = -b \\ -2x + y - 2z & = & -b + c \end{array} \quad \begin{array}{l} | -1 \\ \downarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x - y + 2z & = & -a \\ 2w - x & - & z = -b \end{array}$$

$$0 = -a - b + c$$

Das zeigt: Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $-a - b + c \neq 0$ liegen nicht im Bild von f_B . Zum Beispiel ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{im}(f_B)$.

f_c surjektiv $(2, 5)$ (Hier Option B)

Sei $f_c \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll} 2w + x & + z & = a & \\ & x + 2y + z & = b & \left[\begin{array}{l} -1 \\ -2 \end{array} \right] \\ w & + 2y & = c & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} & -6y & = a - b - 2c & | \cdot (-1) \\ & x + 2y + z & = b & | \cdot 3 \\ w & + 2y & = c & | \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} & 6y & = -a + b + 2c & \\ 3x + 6y + 3z & = 3b & & \left[\begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array} \right] \\ 3w & + 6y & = 3c & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} & 6y & = -a + b + 2c & \\ 3x & + 3z & = a + 2b - 2c & \\ 3w & & = a - b + c & \end{array}$$

Wähle z.B. $z = 0$ und löse nach w, x, y auf:

$$f_c \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(a - b + c) \\ \frac{1}{3}(a + 2b - 2c) \\ \frac{1}{6}(-a + b + 2c) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Für A & C lässt sich das Ergebnis leicht überprüfen. Daher kommt es hier mehr auf das Endergebnis als auf die Rechnung (= Ansatz) an.

Für B muss eine Rechnung abgegeben werden.

Je -0,5 Punkte pro Rechenfehler.



Die Studierenden kennen noch kein Gaußverfahren aus der Vorlesung. Alle Äquivalenzumformungen sind zulässig.

3 | Erbsenzählen ★

Beweisen Sie:

- (a) Ein $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum der Dimension n hat p^n Elemente. 5P
(b) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind kein endlich-dimensionaler $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. 5P

Sie dürfen verwenden, dass ein endliches Produkt endlich vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist, und dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

(a) Für $\mathbb{F}_p$ -VR V der Dimension n gilt nach dem Hauptsatz:

$$V \cong (\mathbb{F}_p)^n = \underbrace{\mathbb{F}_p + \dots + \mathbb{F}_p}_{n \text{ Faktoren}}$$

Also ist

$$|V| = |(\mathbb{F}_p)^n| = |\mathbb{F}_p|^n = p^n.$$

(b) Wäre $\mathbb{R}$ endlich-dim. als $\mathbb{Q}$ -VR, würde analog gelten:

$$\mathbb{R} \cong \mathbb{Q}^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}$$

(als $\mathbb{Q}$ -VR, also erst recht als Menge).

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, würde hieraus folgen, dass auch $\mathbb{R}$ abzählbar ist ↯ (Bsp. 1.25 (e))

4 | Grenzen des Wachstums ★

Eine *Fahne* der Länge d in einem Vektorraum V ist eine Kette von Untervektorräumen von V der Form $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$. (Die Notation $A \subsetneq B$ bedeutet $A \subseteq B$ aber $A \neq B$). Zeigen Sie, dass für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V die maximale Länge einer solchen Fahne gleich der Dimension von V ist.

10 P

Maximale Länge $\geq \dim V$:

Sei $(v_1, \dots, v_d)$ eine Basis von V , also $d = \dim V$.

Betrachte

$$U_0 := \langle () \rangle = \{0\}$$

$$U_1 := \langle v_1 \rangle$$

$$U_2 := \langle v_1, v_2 \rangle$$

$\vdots$

$$U_d := \langle v_1, v_2, \dots, v_d \rangle$$

Dann ist jeweils $U_i \subseteq U_{i+1}$, aber $U_i \neq U_{i+1}$.

(Mögliche Argumente für $U_i \neq U_{i+1}$ z.B.:

- $v_{i+1} \in U_{i+1}$ aber $v_{i+1} \notin U_i$
- jeweils $(v_1, \dots, v_i)$ Basis von U_i ,
also $\dim U_i = i$; insbes. $\dim U_i \neq \dim U_{i+1}$.)

Also def. $U_0 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$ Fahne der Länge $d = \dim V$.

Maximale Länge $\leq \dim V$:

Sei $U_0 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$ Fahne maximaler Länge.

Da jeweils $U_i \subsetneq U_{i+1}$, ist $\dim U_i < \dim U_{i+1}$

(Dimensionsformel S.14 (a)), also $\dim U_i + 1 \leq \dim U_{i+1}$

Insgesamt folgt:

$$\dim U_0 + d \leq \dim U_d$$

Andererseits ist $0 \leq \dim U_0$ und $\dim U_d \leq \dim V$.

Also folgt:

$$d \leq \dim V$$

Für jede Fahne $U_0 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$

□