Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Tariq Syed

Wintersemester 2025/26
19.12.2025

Lineare Algebra I
Blatt 10

Das in Aufgabe 2 angesprochene Gaußverfahren (Satz 6.26) wird in der ersten Vorlesung im neuen Jahr eingeführt. Die übrigen Aufgaben auf diesem Blatt sollten bereits jetzt lösbar sein.

1 | Spindel

Welche reellen 2×2-Matrizen kommutieren mit allen reellen 2×2-Matrizen? Das heißt, für welche $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ gilt: $AB = BA$ für alle $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$?

2 | Schema G

Bringen Sie die folgende Matrix mittels des Gaußverfahrens (a) auf Zeilenstufenform, (b) auf Zeilennormalform, und (c) auf Normalform (siehe Beweis von Satz 6.26). Geben Sie in jedem Schritt an, welche Operation Sie durchführen!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3 | Stufentupel ★

Die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ist bezüglich der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum – siehe Vorlesung, Beispiel (d) nach Notiz 4.2 oder den Beweis zu Satz 6.5. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgende Abbildung:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < n \\ 1 & \text{falls } x \geqslant n \end{cases}$$

Ist das Tupel $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Ist es ein Erzeugendensystem?

4 | Projektion ★

Sei $p \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V mit $p \circ p = p$.

(a) Gibt es einen derartigen Endomorphismus auf $V = \mathbb{R}^3$?
(b) Zeigen Sie, dass für jeden solchen Endomorphismus gilt: $\ker(p) + \mathrm{im}(p) = V$ und $\ker(p) \cap \mathrm{im}(p) = \{\mathbf{0}\}$. Insbesondere folgt also nach Aufgabe 3 auf Blatt 8:

$$V = \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p).$$

Abgabefrist: 12.01.2026, 10:15 Uhr.