

1 | Spindel

Welche reellen 2×2 -Matrizen kommutieren mit allen reellen 2×2 -Matrizen? Das heißt, für welche $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ gilt: $AB = BA$ für alle $B \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$?

Beh: $AB = BA$ für alle B (1P)
 $\Downarrow$ $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

Beweis:

($\Downarrow$) $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ soll z.B. kommutieren mit ...
(5P)

$$\dots B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad d = a \quad \text{und} \quad b = 0$$

$$\dots B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: \quad \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad c = 0.$$

A muss also von der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ sein.

(11) Für beliebiges $B = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$
(4P) gilt:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aw & ax \\ ay & az \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= B \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

□

2 | Schema G

Bringen Sie die folgende Matrix mittels des Gaußverfahrens (a) auf Zeilenstufenform, (b) auf Zeilennormalform, und (c) auf Normalform (siehe Beweis von Satz 6.26). Geben Sie in jedem Schritt an, welche Operation Sie durchführen!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \swarrow \\ \nwarrow \end{array} \right\} \text{alternativ:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \swarrow -3 \\ \nwarrow -4 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & 32 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 15 & 28 & 5 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \swarrow +4 \\ \nwarrow +5 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot \frac{1}{48}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} -48 \end{array} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7P

Zeilennormalform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} -4 \\ -7 \end{array} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1,5P

Normalform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Spalten-
vertauschungen)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Handwritten annotations: A bracket from column 5 to column 6 is labeled $+4$. A bracket from column 5 to column 7 is labeled -2 . Arrows point from these brackets to the respective columns.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Handwritten annotations: A bracket from column 5 to column 6 is labeled $+3$. A bracket from column 6 to column 7 is labeled $+1$. Arrows point from these brackets to the respective columns.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

The first three columns and the first three rows are highlighted in green.

1,5 P

Je Rechenfehler - 0,5 P.

Keine Punkte, wenn Zeilenstufenform / Zeilennormalform / Normalform nicht erreicht wird.

Aufgabe 3

Sei $f_{n_1}, \dots, f_{n_r}$ eine endliche Teilmenge der $f_n, n \in \mathbb{Z}$, wobei wir o.E. $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ annehmen (ansonsten eben umbenennen).

Seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i f_{n_i} = 0 \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

d.h. es gilt

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i f_{n_i}(x) = 0 \in \mathbb{R}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wähle $x_1 \in (n_1, n_2)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^r \lambda_i f_{n_i}(x_1) = \lambda_1 \\ &= 0 \text{ für } 2 \leq i \leq r, \text{ da } x < n_i \text{ für } 2 \leq i \leq r \\ &= 1 \text{ für } i=1, \text{ da } x > n_1 \end{aligned}$$

Wähle nun $x_2 \in (n_2, n_3)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^r \lambda_i f_{n_i}(x_2) = \lambda_2 \\ &= 0 \text{ für } 1 \leq i \leq r \\ &= 1 \text{ für } i=2 \end{aligned}$$

Setzen wir dies so fort, erhalten wir also

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0.$$

Somit ist das Tupel $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ linear unabhängig. Es ist kein Erzeugendensystem, denn für jede * Linearkombination

$$f = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_{n_i}$$

der f_n 's findet sich ein $x \in \mathbb{R}$ (nämlich einfach ein beliebiges $x \in \{n_1, \dots, n_r\}$), sodass $f(x) = 0$. Es gibt aber natürlich Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ohne diese Eigenschaft, wie z.B.

$$1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1.$$

Aufgabe 4

(a)

Ja, z.B. die Verkettung

$$p: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{p_{1,2}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{i_{1,2}} \mathbb{R}^3$$

$(x, y, z) \mapsto (x, y)$
 $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$

denn es gilt

$$(p \circ p)(x, y, z) = p(x, y, 0) = (x, y, 0) = p(x, y, z)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b)

Sei $v \in V$. Da

$$(p \circ p)(v) = p(v),$$

erhalten wir

$$0 = p(v) - (p \circ p)(v) = p(v - p(v))$$

und somit

$$v - p(v) \in \ker(p).$$

Also gilt für jedes $v \in V$

$$v = \underbrace{v - p(v)}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(v)}_{\in \operatorname{im}(p)} \in \ker(p) + \operatorname{im}(p),$$

und somit

$$V = \ker(p) + \operatorname{im}(p).$$

Sei nun $v \in \ker(p) \cap \operatorname{im}(p)$; es ex. also ein $w \in V$ mit $p(w) = v$ und es gilt $p(v) = 0$. Dann folgt:

$$v = p(w) = (p \circ p)(w) = p(v) = 0$$

und somit $\ker(p) \cap \operatorname{im}(p) = \{0\}$.

Wie in der Aufgabe bereits
währt folgt also $V = \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p)$