

1 | Augen zu und durch!

Gegeben ist das folgende reelle lineare Gleichungssystem mit Unbestimmten $x_1, \dots, x_6$ und einem Parameter t :

$$\begin{array}{rrrrrrr} 3x_2 & - & 9x_3 & + & 6x_4 & - & 6x_5 & + & 15x_6 & = & 6t + 18 \\ -x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & - & 9x_6 & = & -t - 4 \\ -2x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & + & 6x_5 & - & 18x_6 & = & -2 \\ 4x_2 & - & 12x_3 & + & 8x_4 & - & 12x_5 & + & 36x_6 & = & 8t + 28 \end{array}$$

- (a) Bringen Sie die Koeffizientenmatrix mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf Zeilenstufenform.
- (b) Bestimmen Sie alle Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem eine Lösung besitzt.
- (c) Bestimmen Sie in den Fällen, in denen das Gleichungssystem eine Lösung besitzt, den Lösungsraum. Geben Sie dabei auch eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an.

(a) SCHRITT 1:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 3 & -9 & 6 & -6 & 15 & 6t+18 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 3 & -9 & -t-4 \\ 0 & -2 & 6 & -4 & 6 & -18 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 8 & -12 & 36 & 8t+28 \end{array} \right) \quad \left| \cdot \frac{1}{3} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 & -2 & 5 & 2t+6 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 3 & -9 & -t-4 \\ 0 & -2 & 6 & -4 & 6 & -18 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 8 & -12 & 36 & 8t+28 \end{array} \right) \quad \left[\begin{array}{l} + \\ +2 \\ -4 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 & -2 & 5 & 2t+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 4t+10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 16 & 4 \end{array} \right) \quad \left[\begin{array}{l} -2 \\ +4 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 & -2 & 5 & 2t+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2t+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t+12 \end{array} \right) \quad \text{ZSF}$$

(b) Aus (a) folgt:

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+6=0 \\ 4t+12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = -3.$$

(c) Falls $t = -3$:

SCHRITT 2:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow +2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \end{array} \right)$$

SCHRITT 3:

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

SCHRITT 4:

$$\begin{array}{cccccc} \hat{\underline{a}}_1 & & \hat{\underline{a}}_2 & \hat{\underline{a}}_3 & \hat{\underline{a}}_4 & \underline{\underline{b}} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Basis von
 $\mathcal{L}(A)$

2 | Bitte wenden!

Welchen Rang haben die folgenden Matrizen? Bestimmen Sie zu allen Matrizen von vollem Rang die Inversen!

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk } A = 1$$

B:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad B^{-1} = B$$

C:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk } C = 2$$

$$D: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \downarrow -3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \downarrow +2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \downarrow -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ | \cdot \frac{1}{2} \\ | \cdot \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \downarrow -\frac{1}{2} \\ \uparrow +1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$\text{rk } D = 3, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow -2 \\ \downarrow 3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rk } E = 1$$

3 | Potenzproblem ★

Wir nennen eine quadratische Matrix A *nilpotent*, wenn eine ihrer Potenzen A^k ($k \in \mathbb{N}$) die Nullmatrix ist. Eine *strikte obere Dreiecksmatrix* ist eine Matrix $(a_{ij})_{i,j}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \boxed{a_{1i}} & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \circ & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$i-1, i$
 i, i

(a) Strikte obere Dreiecksmatrizen sind nilpotent.

Schreibe $U_i := \langle e_1, \dots, e_i \rangle$
 $= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_k = 0 \forall k > i \right\}$

Dann ist $A \cdot e_i \in U_{i-1}$
 für $i=1, \dots, n$, und somit
 $A \cdot v \in U_{i-1}$
 für alle $v \in U_i$.

Jedes $v \in U_i$ hat die Form
 $v = \sum_{k=1}^i s_k e_k$

für gewisse $s_k \in K$. Somit ist

$$\begin{aligned} A \cdot v &= \sum_{k=1}^i s_k \cdot A \cdot e_k \\ &= s_1 \underbrace{A \cdot e_1}_{\substack{\uparrow \\ U_0 \\ \parallel \\ U_{i-1}}} + s_2 \underbrace{A \cdot e_2}_{\substack{\uparrow \\ U_1 \\ \parallel \\ U_{i-1}}} + \dots + s_i \underbrace{A \cdot e_i}_{\substack{\uparrow \\ U_{i-1}}} \end{aligned}$$

Insbesondere: $A \cdot K^n \subseteq U_{n-1}$
 $A(A \cdot K^n) \subseteq U_{n-2}$
 $\vdots$
 $A^n \cdot K^n \subseteq \underbrace{U_0}_{\{0\}}$

Also ist $A^n = 0$.

(b) Für jede nilpotente $n \times n$ -Matrix A ist $\mathbb{1}_n - A$ invertierbar.

Sei $A^m = 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_n - A) \cdot (\mathbb{1}_n + A + A^2 + \dots + A^{m-1}) &= \mathbb{1}_n + A + A^2 + \dots + A^{m-1} \\ &\quad - (A + A^2 + \dots + A^{m-1} + \underbrace{A^m}_0) \\ &= \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

Also ist A invertierbar mit Inversem $(\mathbb{1}_n + A + A^2 + \dots + A^{m-1})$.

(c) Welches Inverse hat die folgende Matrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A$$

Hier ist $A^3 = 0$.

Somit ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \mathbb{1}_3 + A + A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 | Babel ★

Seien OL, UL, OR und UR die folgenden Matrizen:

$$OL := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad OR := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$UL := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad UR := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als geordnete Basis des Vektorraums aller reellen 2×2 -Matrizen wählt ...

... Hans das Tupel (OL, OR, UL, UR),

Jaël das Tupel (OR, OL, UR, UL),

Sakura das Tupel (OR, UR, OL, UL) und

Hunapú das Tupel (OL - UR, OR, UL, OL + UR).

(a) Zeigen Sie, dass das in der Tat allesamt Basen sind. Mit welcher 4×4 -Matrix würden Hans, Jaël, Sakura und Hunapú jeweils die Transpositionsabbildung

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2) \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

beschreiben?

a:

Da $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ ein 4-dim. VR ist, reicht es in (a) zu prüfen, dass die angegebenen Tupel linear unabhängig sind.

Zum Bsp. Hunapú:

Ist

$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{so folgt: } s_1 + s_4 = 0$$

$$\text{und } s_2 = 0$$

$$\text{und } s_3 = 0$$

$$\text{und } -s_1 + s_4 = 0,$$

und hieraus folgt (über $\mathbb{R}$)

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0.$$

b:

7.4 Satz:

Die Einträge der Matrix

${}_C M_B(f) = (m_{ij})_{ij}$ erfüllen die Gleichung

$$f(b_j) = \sum_i m_{ij} \cdot c_i$$

und sind hierdurch eindeutig bestimmt.

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2) \longrightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$$

$$B = C = B_{\text{Hans}} := (OL, OR, UL, UR)$$

$$OL^T = OL = \begin{pmatrix} 1 \cdot OL \\ + 0 \cdot OR \\ + 0 \cdot UL \\ + 0 \cdot UR \end{pmatrix}$$

$$OR^T = UL = \begin{pmatrix} 0 \cdot OL \\ + 0 \cdot OR \\ + 1 \cdot UL \\ + 0 \cdot UR \end{pmatrix}$$

$$UL^T = OR = \begin{pmatrix} 0 \cdot OL \\ + 1 \cdot OR \\ + 0 \cdot UL \\ + 0 \cdot UR \end{pmatrix}$$

$$UR^T = UR = \begin{pmatrix} 0 \cdot OL \\ + 0 \cdot OR \\ + 0 \cdot UL \\ + 1 \cdot UR \end{pmatrix}$$

Also:

$$B_{\text{Hans}} M_{B_{\text{Hans}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich:

$$B_{\text{Hunapú}} M_{B_{\text{Hunapú}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{\text{Jaël}} M_{B_{\text{Jaël}}}(f) = M_{B_{\text{Sakura}}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$