

1 | Augen zu und durch!

Gegeben ist das folgende reelle lineare Gleichungssystem mit Unbestimmten $x_1, \dots, x_6$ und einem Parameter t :

$$\begin{array}{cccccccl} 3x_2 & - & 9x_3 & + & 6x_4 & - & 6x_5 & + & 15x_6 & = & 6t + 18 \\ -x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & - & 9x_6 & = & -t - 4 \\ -2x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & + & 6x_5 & - & 18x_6 & = & -2 \\ 4x_2 & - & 12x_3 & + & 8x_4 & - & 12x_5 & + & 36x_6 & = & 8t + 28 \end{array}$$

- (a) Bringen Sie die Koeffizientenmatrix mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf Zeilenstufenform.
- (b) Bestimmen Sie alle Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem eine Lösung besitzt.
- (c) Bestimmen Sie in den Fällen, in denen das Gleichungssystem eine Lösung besitzt, den Lösungsraum. Geben Sie dabei auch eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an.

(a)

SCHRITT 1:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 3 & -9 & 6 & -6 & 15 & 6t+18 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 3 & -9 & -t-4 \\ 0 & -2 & 6 & -4 & 6 & -18 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 8 & -12 & 36 & 8t+28 \end{array} \right) \quad \left[\cdot \frac{1}{3} \right]$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & -2 & 5 & 2t+6 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 3 & -9 & -t-4 \\ 0 & -2 & 6 & -4 & 6 & -18 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 8 & -12 & 36 & 8t+28 \end{array} \right) \quad \left[\begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow +2 \\ \leftarrow -4 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & -2 & 5 & 2t+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 4t+10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 16 & 4 \end{array} \right) \quad \left[\begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow +4 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & -2 & 5 & 2t+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2t+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t+12 \end{array} \right)$$

(4P) für
ZSF

(Pivot-Elemente müssen in ZSF auch nicht 1 sein; gefordert wird nur dass sie ungleich 0 sind.)

(b) Aus (a) folgt: $4t+12=0 \Leftrightarrow t=-3$

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+6=0 \\ 4t+12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t=-3.$$

(1P)

(c) Falls $t=-3$:

SCHRITT 2:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{+2}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \end{array} \right)$$

SCHRITT 3:

$$\begin{array}{cccccc} \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

SCHRITT 4:

$$\begin{array}{c}
 \hat{\underline{a}}_1 \quad \hat{\underline{a}}_2 \quad \hat{\underline{a}}_3 \quad \hat{\underline{a}}_4 \quad \hat{\underline{b}} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \\
 \left(\begin{array}{cccccc|c}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 3 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Basis von $\mathcal{L}(A)$

(3 P) für $\mathcal{L}(A)$
 + (1 P) für Basis von $\mathcal{L}(A)$
 + (1 P) für $\mathcal{L}(A, \underline{b})$

(jeweils -0,5P je Rechenfehler)

2 | Bitte wenden!

Welchen Rang haben die folgenden Matrizen? Bestimmen Sie zu allen Matrizen von vollem Rang die Inversen!

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

A: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rk } A = 1$$

1 P

B:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$B^{-1} = B$$

1 P

C: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \cdot \frac{1}{2} \right.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right] -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right] -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rk } C = 2$$

2 P

$$D: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \downarrow -3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \downarrow +2 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \uparrow -1 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ | \cdot \frac{1}{2} \\ | \cdot \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \uparrow -\frac{1}{2} \\ \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \uparrow +1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$\text{rk } D = 3, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z} \oplus$

$\mathbb{Z} \oplus$

$$E: \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow -2 \\ \downarrow 3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rk } E = 1$$

$$\boxed{2 \text{ P}}$$

(jeweils -0,5P je Rechenfehler)

Aufgabe 3

(a)

Sei A eine strikte ~~obere~~ obere Dreiecksmatrix, also von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & & \\ & & 0 & * \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir U_i für den von den ersten i Standardbasisvektoren erzeugten UVR von K^n (für $i \leq n$), so erhalten wir

$$A \cdot v \in U_{i-1} \quad (\text{siehe Def. Matrixmult.})$$

für alle $v \in U_i$ und alle $i \leq n$. Daher erhalten wir $\underbrace{A^n \cdot K^n}_{= U_n} \subset U_0 = \langle \emptyset \rangle = \{0\} \subset K^n$ und

somit ist A^n die Nullmatrix. Also ist A nilpotent.

(b)

Sei $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $A^m = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& (\mathbb{1}_n - A)(\mathbb{1}_n + A + \dots + A^{m-1}) \\
&= (\mathbb{1}_n + \cancel{A} + \cancel{A^2} + \dots + A^{m-1}) - (\cancel{A} + \cancel{A^2} + \dots + \underbrace{A^{m-1} + A^m}_{=0}) \\
&= \mathbb{1}_n \\
&= (\mathbb{1}_n + A + \dots + A^{m-1})(\mathbb{1}_n - A),
\end{aligned}$$

so dass $\mathbb{1}_n + A + \dots + A^{m-1}$ das Inverse von $\mathbb{1}_n - A$ ist.

(c)

Wir nutzen Teil (b):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \mathbb{1}_3 - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilp. (für } n=3)} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \mathbb{1}_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2}_{= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Da $\dim(\text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)) = 4$, reicht es jeweils die lin. Unabhängigkeit zu überprüfen:

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\bullet \underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{Hans} \\ \& \\ \text{auch} \\ \text{Jaël} \\ \text{und} \\ \text{Selma,} \\ \text{da lin.} \\ \text{Unabh.} \\ \text{unabh.} \\ \text{von} \\ \text{Reihenfolge} \end{array} \right\}$$

so gilt also $\lambda_1 = \dots = \lambda_4 = 0$

$$\bullet \underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_4 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{Hunaph} \end{array} \right\}$$

so gilt also $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = \lambda_4$ und $\lambda_1 = -\lambda_4$, sodass

$\lambda_1 = \lambda_4 = 0$

7.4 Satz: Die Einträge der Matrix ${}_c M_B(f) = (m_{ij})_{ij}$ erfüllen die Gleichung

$$f(\underline{b}_j) = \sum_i m_{ij} \underline{c}_i$$

und sind hierdurch eindeutig bestimmt.

Wir können also aus Spalte j von ${}_c M_B(f)$ das Bild von $\underline{b}_j$ unter f ablesen.

Nun zur darstellenden Matrix der Transpositionsabbildung

$$(\)^T: \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2) \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$$

in den vier Basen:

Hans:

Da

$$OL^T = OL, OR^T = UL, UL^T = OR \text{ und } UR^T = UR,$$

ergibt sich direkt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~~Jaël~~ Jaël und Sakura:

Analog:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hinzu:

Da

$$(OL - UR)^T = OL - UR$$

und

$$(OL + UR)^T = OL + UR,$$

erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$