Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Tariq Syed

Wintersemester 2025/26
16.01.2026

Lineare Algebra I
Blatt 12

---

1 | Jetzt wechseln!

Sei $V := \{(x \quad y \quad z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $W := \mathbb{R}^2$. Die folgenden Tupel B und B' bzw. C und C' sind jeweils geordnete Basen von V bzw. W:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad C' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Sei $f \colon V \to W$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$$_C M_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Welche Darstellung hat f bezüglich der Basen B' und C'?

2 | Schwarze Schafe

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen mit Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} b & -b \\ b & b \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} c & 1 & 4 \\ 2 & 2 & c \\ 1 & c & 3c-7 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils alle reellen Werte von a, b und c, für die die Matrizen invertierbar sind.
(b) Berechnen Sie die inversen Matrizen A^{-1} und B^{-1} für alle Werte von a und b, für die sie existieren. Berechnen Sie C^{-1} im Fall $c = 0$.
(c) Bestimmen Sie allgemein die Determinanten von A, B und C.

3 | Eindeutig mehrdeutig

Das folgende lineare Gleichungssystem lässt sich für jede Primzahl p als Gleichungssystem über $\mathbb{F}_p$ auffassen. Für welche Primzahlen p ist es homogen? Für welche p ist es lösbar? Welche Dimension hat jeweils der Lösungsraum des (zugehörigen homogenen) Gleichungssyems?

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

— Aufgabe 4 auf der nächsten Seite —

4 | Abakus ★

Für die folgenden $(n+1) \times (n+1)$-Matrizen gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} = (a+nb)(a-b)^n$$

$$\det \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n(n+1) \cdot a_1 \cdots a_n$$