

1 | Jetzt wechseln!

Sei $V := \{(x \ y \ z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$,
 $W := \mathbb{R}^2$. Die folgenden Tupel B und B' bzw.
 C und C' sind jeweils geordnete Basen von V
bzw. W :

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

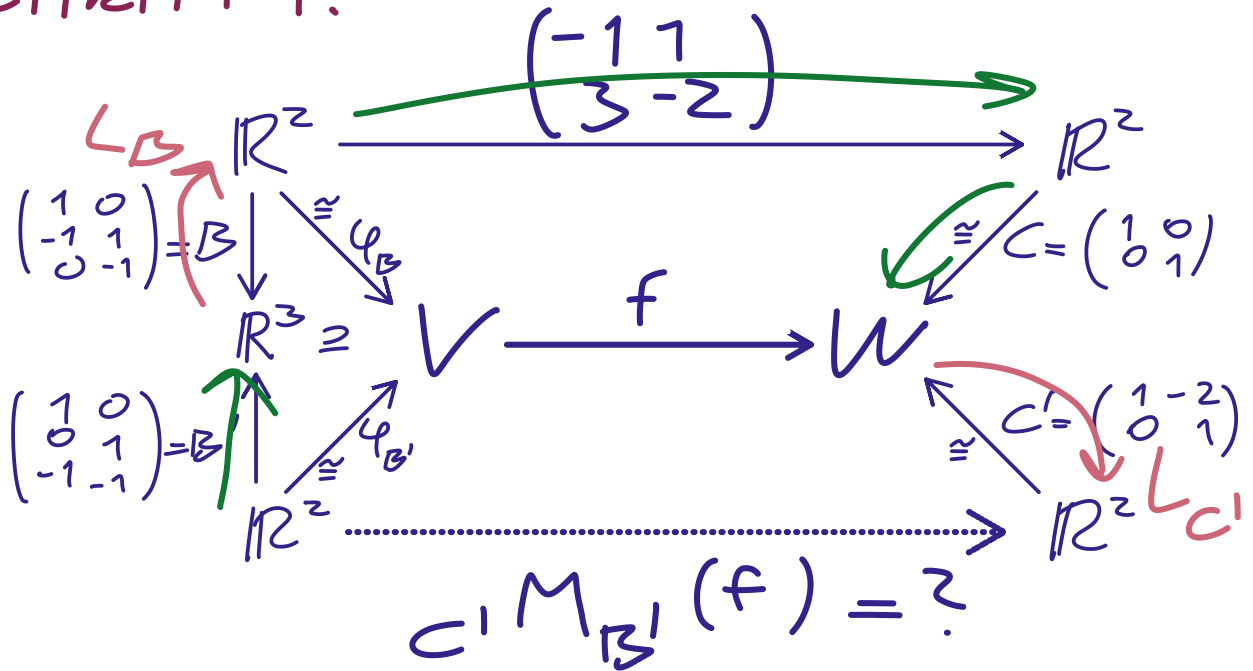
$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad C' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Sei $f: V \rightarrow W$ die lineare Abbildung, die
bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch
die Matrix

$${}_C M_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Welche Darstellung hat f bezüglich der Basen
 B' und C' ?

SCHRITT 1:



SCHRITT 2:

Linksinverse L_B zu B :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow + \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow + \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)}_{\text{ZNF}}$$

$L_B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist also
ein Linksinverses zu B .

[OPTIONAL: Probe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

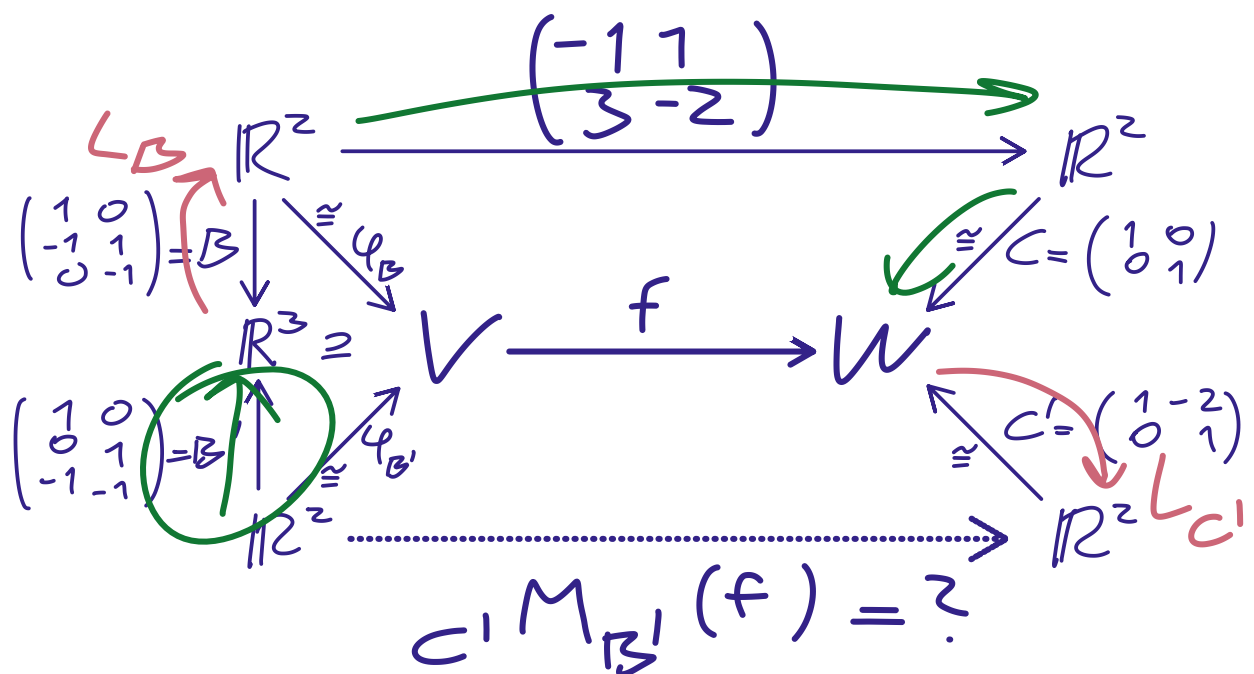
Linksinverses $L_{C'}$ zu C' :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow +2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & +2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$L_{C'} = \begin{pmatrix} 1 & +2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist also
ein (Links-)Inverses
zu C' .

[OPTIONAL: Probe ...]



SCHRITT 3:

$${}_C M_{B'}(f) = L_{C'} C \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot L_B B'$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det A = -a$, also

A invertierbar $\Leftrightarrow a \neq 0$.

Im Fall $a \neq 0$ ist

$$A^{-1} = \frac{1}{-a} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/a & 1 \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} b & -b \\ b & b \end{pmatrix}$$

$$\det B = 2b^2,$$

also B invertierbar $\Leftrightarrow b \neq 0$.

Falls $b \neq 0$ ist

$$B^{-1} = \frac{1}{2b^2} \cdot \begin{pmatrix} b & b \\ -b & b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2b} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} c & 1 & 4 \\ 2 & 2 & c \\ 1 & c & 3c-7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} c & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & c & 0 & 1 & 0 \\ 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & c & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2c & -5c+14 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1-c^2 & -3c^2+7c+4 & 1 & 0 & -c \end{array} \right)$$

Falls $c = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

2 linear abhängige
Spalten, also $\text{Rang } C < 3$

Also ist C für $c=1$
nicht invertierbar.

Falls $c \neq 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2c & -5c+14 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1-c^2 & -3c^2+7c+4 & 1 & 0 & -c \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2(1-c) & -5c+14 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & (1+c)(1-c) & -3c^2+7c+4 & 1 & 0 & -c \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot \frac{1}{2(1-c)} \\ | \cdot \frac{1}{1-c} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5c+14}{2(1-c)} & 0 & \frac{1}{2(1-c)} & \frac{-1}{1-c} \\ 0 & 1+c & \frac{-3c^2+7c+4}{1-c} & \frac{1}{1-c} & 0 & \frac{-c}{1-c} \end{array} \right)$$

$\cdot -(1+c)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5c+14}{2(1-c)} & 0 & \frac{1}{2(1-c)} & \frac{-1}{1-c} \\ 0 & 0 & \times & \frac{1}{1-c} & \frac{-(1+c)}{2(1-c)} & \frac{1}{1-c} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } x &= \frac{2(-3c^2 + 7c + 4)}{2(1-c)} - (1+c) \cdot \frac{-5c+14}{2(1-c)} \\
&= \frac{-6c^2 + 14c + 8 - (-5c + 14 - 5c^2 + 14c)}{2(1-c)} \\
&= \frac{-6c^2 + 14c + 8 - 9c - 14 + 5c^2}{2(1-c)} \\
&= \frac{-c^2 + 5c - 6}{2(1-c)} \\
&= \frac{(c-2)(c-3)}{2(c-1)}
\end{aligned}$$

Falls $c = 2$ oder $c = 3$:

Nullzeile, also ist

$\text{Rang } C < 3$, also ist
 C nicht invertierbar.

Falls $c \in \{1, 2, 3\}$:

C invertierbar.

Inverses für C für $c=0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 3c-7 \\ 0 & 1 & \frac{-5c+14}{2(1-c)} \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2(1-c)} & \frac{-1}{1-c} \\ \frac{1}{1-c} & \frac{-(1+c)}{2(1-c)} & \frac{1}{1-c} \end{array} \right|$$

$c=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \quad \left| \cdot \frac{1}{-3} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow -7 \end{array} \right\} 7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Also

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{10}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen ist

$$\det C = \det \begin{pmatrix} c & 1 & 4 \\ 2 & 2 & c \\ 1 & c & 3c-7 \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

$$= -c^3 + 6c^2 - 11c + 6$$

$$\left[= -(c-1) \cdot (c-2)(c-3) \right]$$

Aufgabe 3

$$-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 = 5$$

$$2x_1 - 3x_3 = 0$$

/ $\mathbb{F}_p$

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für welche Primzahlen p ist das homogen?

→ Für alle p mit $p \nmid 5$
also nur für $p = 5$.

Für welche Primzahlen p ist das lösbar?

Falls $p = 5$:

lösbar, da homogen

Falls $p = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\mathcal{L}(A; \underline{b}) = \emptyset$$

Falls $p = 3$ oder p prim ≥ 7 :

$$(A | \underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ + \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

Falls $p = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$\mathcal{L}(A; \underline{b}) = \emptyset$$

Falls $p \geq 7$:

$2 \neq 0, 3 \neq 0$, und so mit

$$\mathcal{L}(A; \underline{b}) \neq \emptyset.$$

Dimensionen:

$$\dim \mathcal{L}(A) = \begin{cases} 2 & p=2 \\ 1 & p=3 \\ 0 & p=5 \\ 0 & p \geq 7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Zeilen} \quad \text{Spalten} \\
 \downarrow \quad \swarrow \\
 \text{Mat}_K(u \times v) \hat{=} \text{Hom}_K(K^u, K^v) \\
 \quad \quad \quad \uparrow \\
 \text{Mat}_K(v \times u)
 \end{array}
 \quad
 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

$$A_n \in \text{Mat}_{((n+1) \times (n+1))}$$

(a)

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} = (a + nb)(a - b)^n$$

Induktion über n :

IA ($n=0$):

$$\det(a) = (a + 0 \cdot b) \cdot (a - b)^0$$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{IV: } \det A_{n-1} = (a + (n-1)b) \cdot (a - b)^{n-1}$$

$$\det A_n = \det \begin{pmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

$$= (a-b) \cdot \det A_{n-1} - (b-a) \cdot \det B_{n-1}$$

Entwicklung nach Zeile 1

mit $B_n := \begin{pmatrix} b & b & \dots & b \\ b & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ b & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \Bigg]^{-1}$
 $\text{Mat}((n+1) \times (n+1))$

Lemma: $\det B_n = (a-b)^n \cdot b$

Beweis:

IA ($n=0$): $\det(b) = b \checkmark$

IS:

$$\det B = \begin{pmatrix} 0 & b & a & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & b \\ b & & a & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b \\ b & & & & b & a \end{pmatrix}$$

$$= -(b-a) \cdot \det B_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a-b) \cdot (a-b)^{n-1} b \\
 \text{IV} \\
 &= (a-b)^n \cdot b
 \end{aligned}$$

//

$$\begin{aligned}
 \det A_n &= (a-b) \cdot \det A_{n-1} \\
 &\quad - (b-a) \cdot \det B_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a-b)(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1} \\
 \text{IV, Lemma} \\
 &\quad - (b-a) \cdot (a-b)^{n-1} b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a-b)^n (a+(n-1)b) \\
 &\quad + (a-b)^n \cdot b
 \end{aligned}$$

$$= (a+nb)(a-b)^n$$

(b)

$$C(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \text{Mat}((n+1) \times (n+1))$$

$$\det \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n (n+1) \cdot a_1 \cdots a_n$$

IA (n=0)

$$\det(C) = \overbrace{(-1)^0}^1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{\emptyset}}}_{\emptyset} \quad \checkmark$$

IS:

$$\det(C(a_1, \dots, a_n))$$

$$= -a_1 \cdot \det C(a_2, \dots, a_n)$$

Entw. $+(-1)^{n+2} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & \bigcirc \\ * & \dots & & a_n \end{pmatrix}$

1. Spalte

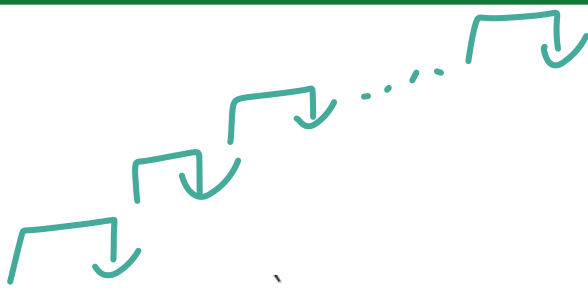
$$= -a_n \cdot (-1)^{n-1} \cdot n \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$+ (-1)^{n+2} \cdot a_n \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$= (-1)^n n \cdot a_n \cdot \dots \cdot a_n$$

$$+ (-1)^n a_n \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$= (-1)^n (n+1) \cdot a_n \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$



$$\det \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n (n+1) \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$= \det \begin{pmatrix} -a_1 & & & & & \\ & -a_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -a_n & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \end{pmatrix} = \dots \quad \checkmark$$