

1 | Jetzt wechseln!

Sei $V := \{(x \ y \ z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$,
 $W := \mathbb{R}^2$. Die folgenden Tupel B und B' bzw.
 C und C' sind jeweils geordnete Basen von V
bzw. W :

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

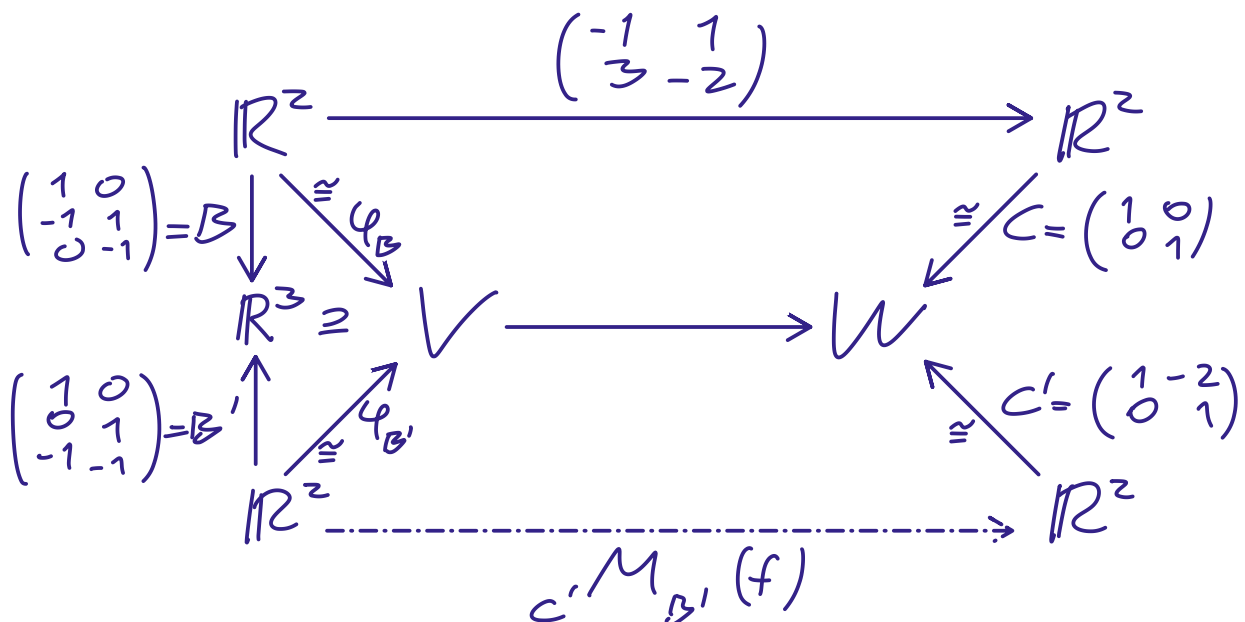
$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad C' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Sei $f: V \rightarrow W$ die lineare Abbildung, die
bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch
die Matrix

$${}_C M_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Welche Darstellung hat f bezüglich der Basen
 B' und C' ?

SCHRITT 1:



SCHRITT 2:

Links inverses L_B zu B :

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \leftarrow \end{array} +$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \leftarrow \end{array} +$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$L_B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist also ein
Links inverses zu B .

Links inverses $L_{C'}$ zu C' :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \leftarrow \end{array} + 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$L_{C'} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist also ein
Links inverses zu C' .

SCHRITT 3:

$${}_C M_{B'}(f) = L_{C'} \cdot C \cdot {}_C M_B(f) \cdot L_B \cdot B'$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- 0,5 P je Rechenfehler
- 2 P je konzeptionellem Fehler
(z.B. 3×3 -Matrix für L_B)

0 P bei falscher Transformationsformel

2 | Mühsame Wendung

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen mit Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} b & -b \\ b & b \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} c & 1 & 4 \\ 2 & 2 & c \\ 1 & c & 3c-7 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie jeweils alle reellen Werte von a , b und c , für die die Matrizen invertierbar sind.
- (b) Berechnen Sie die inversen Matrizen A^{-1} und B^{-1} für alle Werte von a und b , für die sie existieren. Berechnen Sie C^{-1} im Fall $c = 0$.
- (c) Bestimmen Sie allgemein die Determinanten von A , B und C .

A: $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \updownarrow \\ \end{array}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Falls $a = 0$: Zeilennormalform erreicht,
 A nicht invertierbar

Falls $a \neq 0$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} | \cdot \frac{1}{a} \\ \end{array}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \updownarrow + \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 \end{array} \right)$$

A invertierbar,
 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

$$\det A = -a$$

(1 P) für A invertierbar $\Leftrightarrow a \neq 0$

(1 P) für A^{-1}

(1 P) für $\det A$

$$B: \begin{pmatrix} b & -b & | & 1 & 0 \\ b & b & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Falls $b=0$: $B = 0$; nicht invertierbar

Falls $b \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} b & -b & | & 1 & 0 \\ b & b & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot \frac{1}{b} \\ | \cdot \frac{1}{b} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & \frac{1}{b} & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \downarrow - \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 2 & | & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \uparrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \end{pmatrix} \quad B \text{ invertierbar,} \\ B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \\ -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \end{pmatrix}$$

$$\det B = 2b^2$$

$$\det B^{-1} = \frac{1}{(2b)^2} - \left(-\frac{1}{(2b)^2}\right) = \frac{2}{(2b)^2} = \frac{1}{2b^2}$$

(1 P) für B invertierbar $\Leftrightarrow b \neq 0$

(1 P) für B^{-1}

(1 P) für $\det B$

$$C: \begin{pmatrix} c & 1 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & c & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & c & 3c-7 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 3c-7 & | & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & c & | & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow -2 \\ \leftarrow -c \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 3c-7 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2(1-c) & -5c+14 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & (1+c)(1-c) & -3c^2+7c+4 & | & 1 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

Falls $c = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \dots & | & 1 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

(linear abhängige Spalten, also
 $\text{Rang}(C) < 3$, also
 C nicht invertierbar

Falls $c \neq 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 3c-7 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2(1-c) & -5c+14 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & (1+c)(1-c) & -3c^2+7c+4 & | & 1 & 0 & -c \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \cdot \frac{1}{2(1-c)} \\ \downarrow \cdot \frac{1}{1-c} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 3c-7 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5c+14}{2(1-c)} & | & 0 & \frac{1}{2(1-c)} & \frac{-2}{1-c} \\ 0 & 1+c & \frac{-3c^2+7c+4}{1-c} & | & \frac{1}{1-c} & 0 & \frac{-c}{1-c} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -(1+c) \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-8c+14}{2(1-c)} & 0 & \frac{1}{2(1-c)} & \frac{-1}{1-c} \\ 0 & 0 & x & \frac{1}{1-c} & \frac{-(1+c)}{2(1-c)} & \frac{1}{1-c} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } x &= \frac{2(-3c^2+7c+4) + (1+c)(8c-14)}{2(1-c)} \\ &= \frac{-6c^2+14c+8+8c-14+5c^2-14c}{2(1-c)} \\ &= \frac{-c^2+5c-6}{2(1-c)} \\ &= \frac{-(c-2)(c-3)}{2(1-c)} \quad -\frac{6}{2} \end{aligned}$$

Falls $c=2$ oder $c=3$:

Nullzeile, also $\text{Rang}(C) < 3$, also C nicht invertierbar.

Falls $c \notin \{1, 2, 3\}$:

C invertierbar

Inverses von C für $c=0$:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | \cdot -\frac{1}{3} \\ \end{array} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} -7 \\ -7 \end{array} \right] + 7 \\ \end{array} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

In diesem Fall ist also

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen ist

$$\det C = 2c(3c-7) + c + 8c \\ - 8 - 2(3c-7) - c^3$$

$$= \frac{6c^2(-14c + c + 8c)}{-8(-6c) + 14 - c^3}$$

$$= -c^3 + 6c^2 - 11c + 6$$

$$\left(= -(c-1)(c-2)(c-3) \quad \text{optional} \right)$$

(2 P) für C invertierbar $\Leftrightarrow c \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$

(1 P) für C^{-1} (mit $c=0$)

(1 P) für $\det C$

3 | Eindeutig mehrdeutig

Das folgende lineare Gleichungssystem lässt sich für jede Primzahl p als Gleichungssystem über $\mathbb{F}_p$ auffassen. Für welche Primzahlen p ist es homogen? Für welche p ist es lösbar? Welche Dimension hat jeweils der Lösungsraum des (zugehörigen homogenen) Gleichungssystems?

$$-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 = 5$$

$$2x_1 - 3x_3 = 0$$

Es handelt sich um das LGS $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das LGS ist homogen g.d.w. $\underline{b} = \underline{0}$,

also g.d.w. $5 = 0$ in $\mathbb{F}_p$,

also g.d.w. $p \nmid 5$,

also g.d.w. $p \neq 5$ (denn p prim).

Fall $p = 2$:

$$(A | \underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1 Pivot
6.27

6.28

$$\mathcal{L}(A; \underline{b}) = \emptyset$$

$$\dim \mathcal{L}(A) \stackrel{6.15}{=} 3 - \text{rk}(A) = 3 - 1 = 2$$

Fall $p = 5$: Es gibt (mind.) eine Lösung, denn das System ist homogen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \swarrow -2 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 4 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathcal{L}(A) = 3 - 3 = 0$$

Fall p prim ≥ 7 :

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \swarrow + \\ \swarrow + \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \swarrow -3 \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \swarrow \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{-2} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \textcircled{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} & 5 \end{array} \right)$$

Keine Nullzeile, also $\mathcal{L}(A; \underline{b}) \neq \emptyset$.

$$\dim \mathcal{L}(A) = 3 - 3 = 0.$$

Auch $p=3$ separat betrachten!

4 | Abakus ★

Für die folgenden $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen gilt:

(a)
2P

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} = (a + nb)(a - b)^n$$

(b)
2P

$$\det \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n(n+1) \cdot a_1 \cdots a_n$$

a:

Setze

$$A_n := \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_n := \begin{pmatrix} b & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

(jeweils $(n \times n)$ -Matrizen.)

Lemma: $\det B_n = (a-b)^{n-1} \cdot b$

Bew.: $\det B_n = \det(E_{III,1,2}(-1) \cdot B_n) = \det \begin{pmatrix} 0 & b-a & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & b & a & \dots & b \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$

da det Multiplikation erhält
und $\det(E_{III,1,2}(-1)) = 1$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\downarrow}{=} -(b-a) \cdot \det B_{n-1} \\ &= (a-b) \cdot \det B_{n-1} \end{aligned}$$

Laplacescher
Entwicklungssatz

Aus $\det B_2 = \det \begin{pmatrix} b & b \\ b & a \end{pmatrix} = ab - b^2 = (a-b) \cdot b$

ergibt sich daraus die Behauptung mit Induktion. $\square$

Beh.: $\det A_{n+1} = (a+nb)(a-b)^n$

Bew.: Induktion nach n .

Ind.-Anf.: $\det A_2 = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad \checkmark$

Ind.-Schritt: $\det A_n = \det(E_{III,1,2}(-1) \cdot A_n) = \det \begin{pmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$

Entwickel. nach
1. Zeile $\stackrel{\downarrow}{=} (a-b) \cdot \det A_{n-1} - (b-a) \cdot \det B_{n-1}$

Ind.-Vorr. &
Lemma $\stackrel{\downarrow}{=} (a-b) \cdot (a+(n-2)b) \cdot (a-b)^{n-2} + (a-b) \cdot (a-b)^{n-2} \cdot b$

$$= (a+(n-2)b)(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} \cdot b$$

$$= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

$\square$

6:

Setze $C_n(a_1, \dots, a_n) := \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (n \times n)\text{-Matrix}$

Beh.: $\det C_n(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \quad (\forall a_1, \dots, a_{n-1} \in K)$

Bewe.: Induktion nach n .

Ind.-Anfang: $n=2, \quad \det C_2(a_1) = \det \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -a_1 - a_1 = (-1) \cdot 2 \cdot a_1 \quad \checkmark$

Ind.-Schritt:

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned} \det C_n(a_1, \dots, a_n) &= (-a_1) \cdot \det C_{n-1}(a_2, \dots, a_{n-1}) + (-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ -a_2 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Ind. Vorr. \& Berechnung von det der Diagonalmatrix}}{=} (-a_1) \cdot (-1)^{n-2} \cdot (n-1) \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} + (-1)^{n+1} a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} + (-1)^{n+1} a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot n \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \end{aligned}$$

□