

Lineare Algebra I

Blatt 13

1 | Wettkochen

Welche Lösungsräume haben die folgenden linearen Gleichungssysteme in sechs reellen Variablen?

$$(a) \begin{cases} x_4 - 3x_5 + 4x_6 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_5 - 7x_6 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 11x_6 = 4 \\ 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_4 - 3x_5 + 4x_6 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_5 - 7x_6 = 5 \\ 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 11x_6 = 4 \\ 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Geben Sie insbesondere eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an!

2 | Zahlensalat

Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{F}_7}(4 \times 4) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{F}_7}(4 \times 4)$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{Q}}(4 \times 4) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{Q}}(4 \times 4)$$

3 | Eigenanteil

Sei $f \in \text{End}_{\mathbb{F}_5}(\mathbb{F}_5^3)$ durch Multiplikation mit folgender Matrix gegeben.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Eigenwerte hat f ? Welche Dimensionen haben die zugehörigen Eigenräume? Ist f diagonalisierbar?

4 | Schwindelwert ★

Sei V ein Vektorraum über K , und seien $f, g \in \text{End}_K(V)$ zwei Endomorphismen. Beweisen Sie:

- (a) Die Eigenwerte ungleich Null von $f \circ g$ und $g \circ f$ stimmen stets überein.
- (b) Ist V endlich-dimensional, stimmen *alle* Eigenwerte von $f \circ g$ und $g \circ f$ überein.
- (c) Ist V nicht endlich-dimensional, ist es hingegen möglich, dass Null Eigenwert ist von $f \circ g$, aber nicht von $g \circ f$.