

1 | Wettkochen

Welche Lösungsräume haben die folgenden linearen Gleichungssysteme in sechs reellen Variablen?

$$(a) \begin{cases} x_4 - 3x_5 + 4x_6 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_5 - 7x_6 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 11x_6 = 4 \\ 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 = 5 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_4 - 3x_5 + 4x_6 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_5 - 7x_6 = 5 \\ 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 11x_6 = 4 \\ 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Geben Sie insbesondere eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an!

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{I,1,2} \\ E_{III,1,3}^{(+3)} \\ E_{III,1,4}^{(-4)} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & 32 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 15 & 28 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{III,2,3}^{(4)} \\ E_{III,2,4}^{(5)} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{III,3,4}^{(-1)} \\ E_{II,3}^{(\frac{1}{48})} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{Aufüllen} \\ \text{mit neuen} \\ \text{Zeilen} \\ \text{Schritt 4 im} \\ \text{Rezept 6.28)} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsmenge: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(b) Die Matrix ist die selbe, nur die gewünschte Lösung ist anders.

$\Rightarrow$ Der Kern ist der selbe wie in (a),

d.h. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Wir müssen nur noch eine spezielle Lösung finden.
Dafür wende die gleichen Schritte wie in (a) auf den neuen Lösungsvektor an:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{I,12}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} E_{III,13}(-3) \\ E_{III,14}(-4) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -11 \\ -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} E_{III,2,3}(4) \\ E_{III,2,4}(5) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -15 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{III,3,4}(-1)} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{↯}$$

An dieser Stelle ist die untere Zeile der Matrix nur noch mit Nullen besetzt, aber $-10 \neq 0 \Rightarrow$ Es gibt keine Lösung! ∇

2 | Zahlensalat

Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{F}_7}(4 \times 4)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{F}_7}(4 \times 4)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{Q}}(4 \times 4)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{Q}}(4 \times 4)$$

Entw. nach 1. Spalte

$$\det B = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (48 + 0 + 3 - 0 - 30 - 0) - 5 \cdot (16 + 0 + 12 - 0 - 10 - 18) + 2 \cdot (0 + 0 + 24 - 0 - 2 - 36) - 6 \cdot (0 + 9 + 36 - 0 - 8 - 90)$$

$$= 21 - 0 + (-18) - 42 = -49 \neq 0$$

$\Rightarrow B$ ist invertierbar.

$$\Rightarrow \det A = -49 = \overline{0} \text{ in } \mathbb{F}_7$$

$\Rightarrow A$ ist nicht invertierbar.

$$\det D = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Entw. nach 1. Spalte

$$= 1 \cdot (9 + 24 + 40 - 45 - 12 - 16) - 2 \cdot (6 + 18 + 32 - 36 - 8 - 12)$$

$$+ 5 \cdot (8 + 45 + 24 - 48 - 20 - 9) - 4 \cdot (16 + 60 + 36 - 64 - 30 - 18)$$

$$= 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow D$ ist nicht invertierbar

$$\Rightarrow \det C = \overline{0}$$

$\Rightarrow C$ nicht invertierbar.

3 | Eigenanteil

Sei $f \in \text{End}_{\mathbb{F}_5}(\mathbb{F}_5^3)$ durch Multiplikation mit folgender Matrix gegeben.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Eigenwerte hat f ? Welche Dimensionen haben die zugehörigen Eigenräume? Ist f diagonalisierbar?

Eigenwerte:

$$\det \begin{pmatrix} x-3 & -2 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 \\ -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-3)(x-1)^2 - 4 = (x-3)(x^2-2x+1) - 4$$
$$= x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \stackrel{\text{in } \mathbb{F}_5}{=} x^3 + 2x + 3$$

Einsetzen ergibt: $-1 (=4)$ und 2 sind die einzigen Nullstellen
 $\Rightarrow$ Eigenwerte sind -1 und 2

Dimension des Eigenraums zu -1 :

Dieser Eigenraum ist der Kern der Matrix $\begin{pmatrix} 3-(-1) & 2 & 0 \\ 0 & 1-(-1) & 2 \\ 1 & 0 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Bestimme Rang der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}_{3,1}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}_{1,2}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matrix hat Rang 1 $\xRightarrow{\text{Dimensionsformel}}$ Kern ist 2-dimensional

Dimension des Eigenraums zu 2 ist mindestens 1. Also ist die Dimension dieses Eigenraums genau 1, denn die beiden Eigenräume schneiden sich nicht und ihre Summe ist ein Unterraum eines 3-dimensionalen Raums.

Also ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume genau 3, und f ist diagonalisierbar nach dem geometrischen Diagonalisierbarkeitskriterium.

4 | Schwindelwert ★

Sei V ein Vektorraum über K , und seien $f, g \in \text{End}_K(V)$ zwei Endomorphismen. Beweisen Sie:

- (a) Die Eigenwerte ungleich Null von $f \circ g$ und $g \circ f$ stimmen stets überein.
- (b) Ist V endlich-dimensional, stimmen *alle* Eigenwerte von $f \circ g$ und $g \circ f$ überein.
- (c) Ist V nicht endlich-dimensional, ist es hingegen möglich, dass Null Eigenwert ist von $f \circ g$, aber nicht von $g \circ f$.

a: Sei $\lambda \in K^*$ Eigenwert von $f \circ g$.

Dann ex. $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$ mit $f(g(\underline{v})) = \lambda \cdot \underline{v}$.

Falls $g(\underline{v}) = \underline{0}$, folgt $f(g(\underline{v})) = \underline{0}$, da f linear, und das steht im Widerspruch zu $f(g(\underline{v})) = \lambda \cdot \underline{v} \neq \underline{0}$.
↗ ↖

Also ist $g(\underline{v}) \in V \setminus \{\underline{0}\}$. Ferner gilt:

$$g(f(g(\underline{v}))) = g(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot g(\underline{v}).$$

Also ist $g(\underline{v})$ ein EV von $g \circ f$ zum Eigenwert λ .

b: Sei V endlich-dim. und $0 \in K$ Eigenwert von $f \circ g$.

Falls f nicht injektiv, ex. $\underline{w} \in V \setminus \{\underline{0}\}$ mit $f(\underline{w}) = \underline{0}$. Dann ist

$$g(f(\underline{w})) = \underline{0},$$

und somit $\underline{w}$ EV von $g \circ f$ zum Eigenwert 0.

Falls f injektiv, so betrachte einen EV $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$ von $f \circ g$ zum Eigenwert 0, also $f(g(\underline{v})) = \underline{0}$.

Da f injektiv, folgt $g(\underline{v}) = \underline{0}$.

Da f injektiv und V endlich-dim., ist ferner f nach Korollar 5.19 ein Isomorphismus.

Sei f^{-1} die Umkehrabb. Dann ist

$$f^{-1}(\underline{v}) \in V \setminus \{\underline{0}\}, \text{ und}$$

$$g(f(f^{-1}(\underline{v}))) = g(\underline{v}) = \underline{0}.$$

Also ist $f^{-1}(\underline{v})$ ein EV von $g \circ f$ zum Eigenwert 0.

c:

Betrachte die Endomorphismen
 $K^N \xrightarrow{f} K^N$ und $K^N \xrightarrow{g} K^N$
 $(a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$ und $(a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots)$

Dann ist $g \circ f = \text{id}$, also 0 kein EW von $g \circ f$
aber $(f \circ g)(1, 0, 0, \dots) = 0 \Rightarrow 0$ EW von $f \circ g$