

Lineare Algebra I, Test 1

Überblick: Alle Fragen, alle Antworten

Aufgabe 1 Sei M eine Menge, und seien A , B und C Teilmengen von M .

(w) (f)

- ☐ $A \setminus B = B \setminus A$
- ☐ $A \cap B = B \cap A$
- ☐ $A \cup B = B \cup A$
- ☐ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- ☐ $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$
- ☐ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Aufgabe 2 Welche der folgenden Aussagen über Relationen sind richtig?

(w) (f)

- ☐ Die durch $x \sim y :\Leftrightarrow x > y$ auf $\mathbb{Z}$ definierte Relation ist reflexiv.
- ☐ Die durch $x \sim y :\Leftrightarrow x^2 = y^2$ auf $\mathbb{R}$ definierte Relation ist symmetrisch.
- ☐ Die durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \geq 0$ auf $\mathbb{R}$ definierte Relation ist reflexiv.
- ☐ Eine Relation $\sim$ auf einer Menge M ist genau dann symmetrisch, wenn für jedes $x \in M$ gilt: $x \sim x$.
- ☐ Die durch $x \sim y :\Leftrightarrow x = y^2$ auf $\mathbb{R}$ definierte Relation ist transitiv.
- ☐ Eine Relation ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn sie symmetrisch und reflexiv ist.
- ☐ Jede Äquivalenzrelation ist transitiv.

Aufgabe 3 Sei $*$ eine Verknüpfung auf einer Menge M .

(w) (f)

- ☐ Ist $e \in M$ ein neutrales Element für $*$, so gilt $e * e = e$.
- ☐ Hat $e \in M$ die Eigenschaft $e * e = e$, so bezeichnen wir e als neutrales Element für $*$.
- ☐ Die Verknüpfung ist eine Abbildung $M \times M \rightarrow M$.
- ☐ Sei e ein neutrales Element für $*$. Ein inverses Element zu $x \in M$ bezüglich $*$ ist ein Element x' , für das gilt: $x * e = x' = e * x$.
- ☐ Sei e ein neutrales Element für $*$. Ein inverses Element zu $x \in M$ bezüglich $*$ ist ein Element x' , für das gilt: $x * x' = e = x' * x$.
- ☐ Für beliebige $x, y, z \in M$ gilt: $(x * y) * z = x * (y * z)$

Aufgabe 4 Sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen.

(w) (f)

- ☺ Ein Element $a \in A$ ist genau dann ein Urbild von $b \in B$, wenn gilt $f(a) = b$.
- ☺ Jedes Element aus A besitzt genau ein Bild in B .
- ☺ Ein Element a liegt genau dann in der Faser eines Elements $b \in B$, wenn gilt $f(a) = b$.
- ☺ Die Faser eines Elements $b \in B$ ist das Urbild der Teilmenge $\{b\} \subseteq B$.
- ☺ Ein Element $b \in B$ liegt genau dann im Bild von f , wenn es ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.
- ☺ Ein Element $b \in B$ liegt genau dann im Bild von f , wenn für alle $a \in A$ gilt: $f(a) = b$.

Aufgabe 5 Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen.

(w) (f)

- ☺ f ist genau dann surjektiv, wenn gilt $f(M) = N$.
- ☺ f ist genau dann surjektiv, wenn alle Fasern von f leer sind.
- ☺ Ist f injektiv, so besteht jede Faser von f aus höchstens einem Element.
- ☺ f ist genau dann injektiv, wenn für alle $m, m' \in M$ gilt: $f(m) = f(m') \Rightarrow m = m'$.
- ☺ f ist genau dann injektiv, wenn für alle $m, m' \in N$ gilt: $m = m' \Rightarrow f(m) = f(m')$.
- ☺ Ist M unendlich und N endlich, so ist f surjektiv.

Aufgabe 6 Sei $f: (G, \cdot) \rightarrow (K, *)$ ein Gruppenhomomorphismus.

(w) (f)

- ☺ Der Kern von f besteht aus allen Elementen von G , die auf das neutrale Element von K abgebildet werden.
- ☺ Das Bild von f besteht aus allen Elementen von K , auf die das neutrale Element von G abgebildet wird.
- ☺ Das Bild von f ist eine Untergruppe von $(K, *)$.
- ☺ Für beliebige $x, y \in G$ gilt $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$.
- ☺ Für beliebige $x, y, z \in G$ gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- ☺ Das neutrale Element von G wird von f abgebildet auf das neutrale Element von K .
- ☺ Für beliebige Elemente $x, y \in G$ gilt: $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$
- ☺ Für beliebige Elemente $x, y \in G$ gilt: $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$