Lineare Algebra I, Test 2
Überblick: Alle Fragen, alle Antworten

Aufgabe 1 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w)	(f)	
☺		$(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe
	☹	$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist eine Gruppe
	☹	$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe
☺		$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe
	☹	$(\mathbb{R}, \cdot)$ ist eine Gruppe
☺		$(\{1, -1\}, \cdot)$ ist eine Gruppe
	☹	$\{1, 0, -1\}$ definiert eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$

Aufgabe 2 Sei $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, seien $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ Vektoren und $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ Skalare. Welcher der folgenden Gleichungen sind im Allgemeinen richtig?

(w)	(f)	
☺		$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$
	☹	$s_1 \cdot \mathbf{v}_1 + s_2 \cdot \mathbf{v}_2 = (s_1 + s_2) \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
☺		$(s_1 s_2) \cdot \mathbf{v} = s_1(s_2 \cdot \mathbf{v})$
	☹	$(s_1 s_2) \cdot \mathbf{v} = s_1 \cdot \mathbf{v} + s_2 \cdot \mathbf{v}$
	☹	$(s_1 + s_2) \cdot \mathbf{v} = s_1 \cdot (s_2 \cdot \mathbf{v})$
☺		$0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$
☺		$2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v}$

Aufgabe 3 Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche Aussagen sind richtig?

(w)	(f)	
	☹	$\emptyset$ (die leere Menge) ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
☺		$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
	☹	$\{1\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}$.
☺		$\left\{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \,\middle\vert\, x \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
☺		$\left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle\vert\, x \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
	☹	$\left\{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle\vert\, x \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
	☹	Das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}$.
	☹	$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 Sei K ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum, und seien U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

(w)	(f)	
☺		Der Schnitt $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ ist ein Untervektorraum von V.
	☹	Die Vereinigung $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ ist ein Untervektorraum von V.
☺		Für jede Teilmenge $M \subseteq V$ ist die lineare Hülle $\langle M \rangle$ ein Untervektorraum von V.
☺		Die interne Summe $U_1 + U_2 + U_3$ ist ein Untervektorraum von V.
	☹	Die Differenz $U_1 \setminus U_2$ ist ein Untervektorraum von V.
	☹	Das kartesische Produkt $U_1 \times U_2$ ist ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 5 Sei V ein reeller Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Seien $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ drei Vektoren in V. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

(w)	(f)	
☺		Ist $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ein Erzeugendensystem von V, so ist auch $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ein Erzeugendensystem von V.
	☹	Ist das Tupel $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ linear unabhängig, so ist auch das Tupel $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ linear unabhängig.
	☹	Ist $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ eine Basis von V, so ist auch $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ eine Basis von V.
☺		Jede Basis von V ist ein Erzeugendensystem von V.
☺		Jede Basis von V ist linear unabhängig.
	☹	Sind $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ und $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ Basen von V, so ist auch $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ eine Basis von V.

Aufgabe 6 Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-linear?

(w)	(f)	
☺		Die Abbildung $x \mapsto x$ ist linear.
☺		Die Abbildung $x \mapsto -2x$ ist linear.
	☹	Die Abbildung $x \mapsto x^2$ ist linear.
	☹	Die Abbildung $x \mapsto x + 1$ ist linear.
	☹	Die Abbildung $x \mapsto -2 + x$ ist linear.
	☹	Die Abbildung $x \mapsto \sqrt{x^2}$ ist linear.