

Lineare Algebra I: Klausur 1

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Winter 2025/26

- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer einfachen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

Name: Y

Matrikelnr.:

Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.

- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen, solange Sie den folgenden Punkt beachten. Wenn Sie zusätzliche lose Seiten benötigen, geben Sie uns bitte ein Zeichen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben jeweils auf den dafür vorgesehenen Seiten. Machen Sie auf jeder losen Seite klar erkenntlich, welche Aufgabe Sie lösen. Niederschriften, die nicht klar zugeordnet sind, werden nicht korrigiert.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							/60

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgende reelle Matrix mit einem Parameter $s \in \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & s & s \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Determinante von A in Abhängigkeit von s . Für welche Werte von s ist A invertierbar? (2 Punkte)
- (b) Formen Sie die erweiterte Matrix $(A \mid 1_4)$, also die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & s & s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

durch Zeilentransformationen so um, dass die ersten vier Spalten in Zeilenstufenform sind. Sie müssen unter Umständen je nach Wert von s verschiedene Fälle unterscheiden. (4 Punkte)

- (c) Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von s . (2 Punkte)
- (d) Bestimmen Sie für diejenigen Werte von s , für die A invertierbar ist, die inverse Matrix A^{-1} . (2 Punkte)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Lösungsvorschlag Aufg 1

(a) z. B. Laplace-Entwicklung nach erster Spalte:

$$\det(A) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & s & s \\ 0 & s & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & s & s \\ 0 & s & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} & \cancel{2} \cdot (3s - 3s^2) - 2 \cdot (2s - 2s^2) \\ &= -2 \cdot s \cdot (s-1) \end{aligned}$$

A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$,
also für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$(b) \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & s & s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s & s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & s & s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ist für $s \neq 0$ in Zeilenstufenform

Für $s=0$:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ist in Zeilenstufenform.

(c) Der Rang einer Matrix ist die Zahl der Pivotelemente der Matrix in Zeilenstufenform. Also:

Falls $s=0$ oder $s=1$: $\text{Rang}(A)=3$

Falls $s \neq 0$ und $s \neq 1$: $\text{Rang}(A)=4$

(d) Aus (b) erhalte für $s \neq 0$ und $s \neq 1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & s & s & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \cdot \frac{1}{s} \\ \cdot \frac{1}{1-s} \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{s-1} & \frac{1}{1-s} & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s} & \frac{1}{s-1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} & \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{s-1} & \frac{1}{1-s} & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \left[\cdot (-1) \right]$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s-1} & \frac{1}{1-s} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s} & \frac{1}{s-1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} & \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{s-1} & \frac{1}{1-s} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nun lässt sich A^{-1} aus den letzten vier Spalten ablesen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{1-s} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{1-s} & \frac{1}{s-1} & -1 & 1 \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} & \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{1-s} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten die folgenden beiden reellen Vektorräume:

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \right\} \qquad W := \mathbb{R}^2$$

- (a) Begründen Sie ausführlich, warum die folgenden Tupel B und B' Basen von V , die Tupel C und C' Basen von W sind.

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \qquad C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad C' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(4 Punkte)

- (b) Sei $f: V \rightarrow W$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$${}_C M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Darstellung hat f bezüglich der Basen B' und C' ?

(6 Punkte)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2

— keine Musterlösung,
nur Endergebnis zu (b) —

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{C^1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C^1 M_{B^1}(f) &= L_{C^1} C \cdot C M_B(f) \cdot L_B \cdot B^1 \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Kreuzen Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Sie erhalten als Punktzahl für diese Aufgabe die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

(w) (f)

- ☒ ☹ Für beliebige Teilmengen A, B, C einer Menge gilt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- ☺ ☒ Es gibt eine wohldefinierte Abbildung $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$, die einen Bruch p/q auf $p - q$ abbildet.
- ☒ ☹ Ist die Komposition zweier Abbildungen $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ injektiv, so ist bereits f injektiv.
- ☺ ☒ Jede injektive Abbildung zwischen endlichen Mengen ist auch surjektiv.
- ☺ ☒ Es gibt eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
- ☺ ☒ Die durch $x \sim y :\Leftrightarrow x > y$ auf $\mathbb{Z}$ definierte Relation $\sim$ ist symmetrisch.
- ☺ ☒ Die Menge der reellen $(n \times n)$ -Matrizen bildet zusammen mit der Matrix-Multiplikation als Verknüpfung eine Gruppe.
- ☺ ☒ Für beliebige Elemente x, y einer multiplikativen Gruppen $(G, \cdot)$ gilt: $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$
- ☒ ☹ Das Signum einer Transposition ist -1 .
- ☒ ☹ Sei n eine natürliche Zahl ($n \geq 1$). Der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

Aufgabe 4

Kreuzen Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Sie erhalten als Punktzahl für diese Aufgabe die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Im Folgenden sei K stets ein Körper.

(w) (f)

- ☒ ☐ Ist eine bijektive Abbildung f zwischen Vektorräumen linear, so ist auch die Umkehrabbildung f^{-1} linear.
- ☐ ☒ Die Menge aller (2×2) -Matrizen über K mit Determinante Null ist ein Untervektorraum des Vektorraums aller (2×2) -Matrizen $\text{Mat}_K(2 \times 2)$.
- ☒ ☐ Das Tupel aller Monome $(1, X, X^2, X^3, \dots)$ ist ein Erzeugendensystem des Polynomrings $K[X]$ (aufgefasst als K -Vektorraum).
- ☒ ☐ Jede Basis eines Vektorraums ist linear unabhängig und ein Erzeugendensystem.
- ☒ ☐ Die Dimension eines endlich-dimensionalen Vektorraums V ist gleich der maximalen Länge eines linear unabhängigen Tupels von Vektoren aus V .
- ☐ ☒ Sei $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ein n -Tupel von (Spalten-)Vektoren aus K^m . Das Tupel ist genau dann ein Erzeugendensystem von K^m , wenn es – aufgefasst als Matrix – Rang n hat.
- ☒ ☐ Jedes homogene lineare Gleichungssystem besitzt eine Lösung.
- ☐ ☒ Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihr Zeilenrang gleich ihrem Spaltenrang ist.
- ☐ ☒ Sei B die folgende Basis von $\text{Mat}_K(2 \times 2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei C die Standardbasis (1) des ein-dimensionalen K -Vektorraums K . Bezüglich dieser Basen ist die Spur $\text{tr}: \text{Mat}_K(2 \times 2) \rightarrow K$ gegeben durch die folgende Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ☐ ☒ Eine $(n \times n)$ Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n verschiedene Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 5

In dieser Aufgabe betrachten wir die abstrakte Summe von Vektorräumen und die interne Summe von Untervektorräumen. Seien V , V_1 und V_2 endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K .

(a) Definieren Sie die abstrakte Summe $V_1 \oplus V_2$. (1 Punkte)

(b) Definieren Sie die interne Summe $U_1 + U_2$ von Untervektorräumen U_1 und U_2 von V . (1 Punkte)

(c) Seien U_1 und U_2 weiterhin Untervektorräume von V . Definieren Sie eine *surjektive* lineare Abbildung

$$s: U_1 \oplus U_2 \rightarrow U_1 + U_2.$$

Weisen Sie die Surjektivität der Abbildung explizit nach. (3 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung s genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $U_1 \cap U_2$ der Nullvektorraum ist. (4 Punkte)

(e) Geben Sie zwei Beispiele für V , U_1 und U_2 an: ein Beispiel, in dem die soeben definierte Abbildung s ein Isomorphismus ist, und ein Beispiel, in dem s kein Isomorphismus ist. (1 Punkte)

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

- a) Die abstrakte Summe $V_1 \oplus V_2$ ist das Kartesische Produkt $V_1 \times V_2$, ausgestattet mit komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation:

$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + (\underline{v}_1', \underline{v}_2') = (\underline{v}_1 + \underline{v}_1', \underline{v}_2 + \underline{v}_2')$$

$$a \cdot (\underline{v}_1, \underline{v}_2) = (a \cdot \underline{v}_1, a \cdot \underline{v}_2)$$

für $\underline{v}_1, \underline{v}_1' \in V_1, \underline{v}_2, \underline{v}_2' \in V_2, a \in K$.

- b) Die interne Summe ist die lineare Hülle der Vereinigung:

$$U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$$

- c) Definiere $s: U_1 \oplus U_2 \longrightarrow U_1 + U_2$
 $(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \mapsto \underline{u}_1 + \underline{u}_2$

Jeder Vektor aus $U_1 + U_2$ ist von der Form $\underline{u}_1 + \underline{u}_2$ für gewisse $\underline{u}_1 \in U_1, \underline{u}_2 \in U_2$ (Satz/Notiz aus Vorlesung). Also ist er von der Form $s(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$. Also ist s surjektiv.

- d) OPTION A: (Funktioniert auch für unendlich-dim. Räume)
- $$\begin{aligned} \text{Ker}(s) &= \{(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \mid \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{0}\} \\ &= \{(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \mid \underline{u}_2 = -\underline{u}_1\} \end{aligned}$$

$$= \{ (u, -u) \mid u \in U_1 \cap U_2 \}$$

Also ist $\ker s \cong U_1 \cap U_2$
(via $(u, -u) \mapsto u$)

Aus dem Injektivitätskriterium folgt also:

s ist genau dann injektiv, wenn
 $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ ist.

(Injektivitätskriterium:

Eine lineare Abb. ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern trivial ist.)

Da s nach (c) stets surjektiv, folgt:

// s ist genau dann Iso, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ ist.

OPTION B:

Nach den Dimensionsformeln gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

($\Rightarrow$) Sei s ein Isomorphismus.

Dann folgt $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1 \oplus U_2)$,
und die Formeln oben zeigen dann

$$\dim(U_1 \cap U_2) = 0.$$

Also folgt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Sei $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Dann ist
 $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$

und aus den Formeln oben ergibt sich:

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1 + U_2).$$

Also ist s eine surjektive lineare Abb. (siehe c) zwischen endlich-dim. Vektorräumen derselben Dimension. Ein Satz aus der Vorlesung besagt, dass eine solche Abb. ein Isomorphismus ist.

$$\begin{aligned} \text{e) } V = \mathbb{R}^2, \quad U_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

– in diesem Fall ist s ein Iso.

$$V = \mathbb{R}^2, \quad U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = U_2$$

– in diesem Fall ist s kein Iso.

Aufgabe 6

Eine **Involution** auf einem Vektorraum V ist ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ mit der Eigenschaft $f \circ f = \text{id}_V$. In dieser Aufgabe betrachten wir Involutionen auf reellen Vektorräumen.

- (a) Geben Sie drei verschiedene Involutionen auf $\mathbb{R}^2$ an, und berechnen Sie jeweils ihr charakteristisches Polynom. (2 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, dass eine Involution $f: V \rightarrow V$ auf einem reellen Vektorraum V nur 1 und -1 als Eigenwerte haben kann. (2 Punkte)
- (c) Sei $f: V \rightarrow V$ eine Involution auf einem reellen Vektorraum V . Zeigen Sie, dass V in die Eigenräume $\text{Eig}(f; 1)$ und $\text{Eig}(f; -1)$ zerfällt, dass also gilt:

$$V = \text{Eig}(f; 1) \oplus \text{Eig}(f; -1)$$

Tipp: Was können Sie für einen beliebigen Vektor $v \in V$ über die Vektoren $v + f(v)$ und $v - f(v)$ sagen? (4 Punkte)

- (d) Klassifizieren Sie alle Involutionen von $\mathbb{R}^2$ bis auf Ähnlichkeit: geben Sie endlich viele Involutionen $f_1, \dots, f_k$ von $\mathbb{R}^2$ an derart, dass jede Involution von $\mathbb{R}^2$ zu genau einer dieser Involutionen $f_1, \dots, f_k$ ähnlich ist. (2 Punkte)

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 6

$$(a) f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\chi_{f_1} = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\chi_{f_2} = \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 \\ 0 & -1-x \end{pmatrix} = (-1-x)^2 = (1+x)^2$$

$$f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\chi_{f_3} = \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (-1-x)(1-x) = x^2 - 1$$

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ Eigenwert von f mit Eigenvektor $\underline{v} \neq \underline{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } \underline{v} &= \text{id}_{\mathbb{V}}(\underline{v}) = f^2(\underline{v}) = f(f(\underline{v})) = f(\alpha \cdot \underline{v}) \\ &= \alpha \cdot f(\underline{v}) = \alpha \cdot (\alpha \cdot \underline{v}) = \alpha^2 \cdot \underline{v} \end{aligned}$$

Da $\underline{v} \neq \underline{0}$ ist, folgt aus

$$\alpha^2 \cdot \underline{v} = \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} \Leftrightarrow (\alpha^2 - 1) \cdot \underline{v} = \underline{0},$$

dass $\alpha^2 - 1 = 0$ gelten muss und damit $\alpha = 1$ oder $\alpha = -1$.

D.h. f kann nur Eigenwerte $\alpha \in \{1, -1\}$ haben.

(c) Sei $v \in V$ beliebig.

Behauptung: $v + f(v) \in \text{Eig}(f_i - 1)$ $f^2 = \text{id}_V$

Begründung: $f(v + f(v)) = f(v) + f^2(v) \stackrel{f^2 = \text{id}_V}{=} f(v) + v = v + f(v)$

Behauptung: $v - f(v) \in \text{Eig}(f_i + 1)$ $f^2 = \text{id}_V$

Begründung: $f(v - f(v)) = f(v) - f^2(v) \stackrel{f^2 = \text{id}_V}{=} f(v) - v = (-1) \cdot (v - f(v))$

Es gilt $v = \underbrace{\frac{1}{2}(f(v) + v)}_{\substack{\in \text{Eig}(f_i - 1), \\ \text{da UVR}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(v - f(v))}_{\substack{\in \text{Eig}(f_i + 1), \\ \text{da UVR}}}$, wie kurzes Nachrechnen zeigt.

Damit lässt sich ein beliebiges $v \in V$ als Summe von Eigenvektoren aus $\text{Eig}(f_i - 1)$ und $\text{Eig}(f_i + 1)$ schreiben, d.h.

$$V = \text{Eig}(f_i - 1) + \text{Eig}(f_i + 1)$$

Außerdem gilt $\text{Eig}(f_i - 1) \cap \text{Eig}(f_i + 1) = \{0_V\}$,

denn für $v \in \text{Eig}(f_i - 1) \cap \text{Eig}(f_i + 1)$ gilt

$$\underbrace{v \stackrel{v \in \text{Eig}(f_i - 1)}{=} f(v)}_{\substack{\uparrow \\ v \in \text{Eig}(f_i - 1)}} \stackrel{v \in \text{Eig}(f_i + 1)}{=} -v \Leftrightarrow 2 \cdot v = 0 \stackrel{\cdot \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} v = 0$$

Damit folgt $V = \text{Eig}(f_i - 1) \oplus \text{Eig}(f_i + 1)$

(d) Wir sehen aufgrund der vorherigen Teilaufgaben, dass alle Involutionen ähnlich sind zu genau einer der Abbildungen:

$$f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

(Nach (c) ist jede Involution diagonalisierbar mit Eigenwerten ± 1 auf der Diagonalen.

Theoretisch gibt es noch die Involution

$$f_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Diese ist aber ähnlich zu f_3 , denn

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Involutionen f_1, f_2, f_3 sind nicht ähnlich zueinander, da sie verschiedene charakteristische Polynome haben (siehe (a)).