Lösungsvorschlag Aufgabe 1

(a)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ 1 & s & 0 & -3 & 3s \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & s & 3s & 0 & s \end{array}\right)$$

(b)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ 1 & s & 0 & -3 & 3s \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & s & 3s & 0 & s \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & s & 0 & -3 & 3s \\ 2 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & s & 3s & 0 & s \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ \cdot(-s) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & s & 0 & -3 & 3s \\ 0 & 1-2s & 3 & 0 & -6s \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & s & 0 & -3 & 3s \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1-2s & 3 & 0 & -6s \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1+2s) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & s & 0 & -3 & 3s \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1+4s & 0 & -1-4s \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Fall $s=0$: Fertig.

Fall $s \neq 0$:

$\cdot s^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & s & 0 & -3 & 3s \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+4s & 0 & -1-4s \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1-4s) \\ \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & s & 0 & -3 & 3s \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-4s \end{array}\right)$$

c) Für $s=0$ hat das LGS eine Lösung.
Falls $s \neq 0$ hat das LGS genau dann eine Lösung, wenn $-1-4s=0$, also $s=-\frac{1}{4}$.

(d) Es ist $\dim(\mathcal{L}(A)) = 4 - \mathrm{rang}(A)$
Der Rang lässt sich aus der Zeilenstufenform ablesen, unabhängig von s ist $\mathrm{rang}(A)=3$.
Also $\dim(\mathcal{L}(A)) = 1$

(e)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\cdot(-2)}{\rightleftarrows} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der Zeilennormalform lässt sich ablesen, dass $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(A|b)$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}(A)$ ist.

Also: $\mathcal{L}(A|b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 3t \\ 3 \\ -1 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$

Musterlösung Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Eigenvektoren von f:

u und v sind EV von f, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot u = \lambda_1 u \quad \text{, wobei } \lambda_1 \text{ Eigenwert ist}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1+1 \\ -3+4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1 = 1$$

und

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4-1 \\ -1-5+1 \\ -3+4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_2 = 5$$

b) Charakteristisches Polynom:

$$\chi_f = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \\ -3 & -4 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)(4-\lambda) + 12 - 4$$

$$- 3(5-\lambda) + 4(2-\lambda) - 4(4-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 35\lambda + 25$$

Zwei Nullstellen bereits aus a) bekannt: Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$

Faktorisieren durch Polynomdivision:

$$(\lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 10\lambda + 25$$

und weiter:

$$(\lambda^2 - 10\lambda + 25) : (\lambda - 5) = \lambda - 5$$

$\Rightarrow$ Nullstelle $\lambda_2 = 5$ hat algebraische Vielfachheit 2.

$\overset{!}{\Rightarrow}$ $\chi_f = (5-\lambda)^2(1-\lambda)$, alle Nullstellen gefunden.

c) Wir haben bereits alle Eigenwerte gefunden: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

da $1 = a_{\lambda_1} \geq g_{\lambda_1} \geq 1$ ist die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$ gleich $g_{\lambda_1} = 1$ und damit $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$

für $\lambda_2 = 5$: löse $(A - \lambda_2 I)v \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit II: $v_1 = v_3$

$\Rightarrow$ einsetzen in I: $-4v_1 - 4v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = -v_2$

$\Rightarrow E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim(E_{\lambda_2}) = 1$

d) Nicht diagonalisierbar, da $a_{\lambda_2} = 2 \neq g_{\lambda_2} = 1$, bzw. $\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) = 1 + 1 \neq 3$

Aufgabe 3

Kreuzen Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Sie erhalten als Punktzahl für diese Aufgabe die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

(w) (f)

- ☺ ☒ Eine Abbildung von Mengen ist genau dann injektiv, wenn jede Faser aus genau einem Element besteht.
- ☺ ☒ Sei n eine natürliche Zahl ($n \geq 1$). Der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann kommutativ, wenn n eine Primzahl ist.
- ☺ ☒ Für beliebige (2×2)-Matrizen A, B gilt: $A \cdot B = B \cdot A$.
- ☒ ☹ Eine injektive Abbildung zwischen zwei endlichen Mengen mit gleich vielen Elementen ist auch surjektiv.
- ☒ ☹ Es gibt eine wohldefinierte Abbildung $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, die die Restklasse von x abbildet auf die Restklasse von $3x$.
- ☺ ☒ Das Signum der Permuation
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
ist 1.
- ☺ ☒ Die natürlichen Zahlen bilden zusammen mit der gewöhnlichen Addition eine abelsche Gruppe.
- ☒ ☹ Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge aller geraden natürlichen Zahlen und der Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 3 teilbar sind.
- ☒ ☹ Sei M eine Menge, $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Sei $s\colon M \to \mathfrak{P}(M)$ die Abbildung, die ein Element $m \in M$ auf die Teilmenge $\{m\}$ von M abbildet. Diese Abbildung ist injektiv.
- ☒ ☹ Für jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M ist die kanonische Abbildung $M \to M/\sim$ surjektiv.

Aufgabe 4

Kreuzen Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Sie erhalten als Punktzahl für diese Aufgabe die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

(w) (f)

☺ ☹ Die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen von $\mathbb{R}^2$ ist ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

☺ ☹ Für jedes Paar linear unabhängiger Vektoren $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ gilt: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

☺ ☹ Der Nullvektorraum $\{0\}$ besitzt als Basis das Tupel $(\mathbf{0})$.

☺ ☹ Sei $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ein n-Tupel von (Spalten-)Vektoren aus K^m. Das Tupel ist genau dann linear unabhängig, wenn es – aufgefasst als Matrix – Rang n hat.

☺ ☹ Ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sein Rang ungleich Null ist.

☺ ☹ Der Rang einer Matrix ist stets durch die Anzahl der Zeilen begrenzt (also $\mathrm{rk}(A) \leq n$ für jede Matrix A mit n Zeilen).

☺ ☹ Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Zeilen linear unabhängig sind.

☺ ☹ Eine (2×3)-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat.

☺ ☹ Sei $f\colon K^2 \to K^2$ bezüglich der Standardbasis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ von K^2 gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann ist f bezüglich der Basis $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ auf dem Definitionsbereich (links) und der Standardbasis auf dem Wertebereich (rechts) gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

☺ ☹ Sei V ein K-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ ein Skalar $a \in K$ mit $f(\mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{v}$ existiert.

Punkteschema Aufgabe 5:

a) $f: V \to W$ linear

$\ker(f) := \{v \in V : f(v) = 0_W\} \subseteq V$ (0.5P)

$\operatorname{im}(f) := \{w \in W : \exists\, v \in V \text{ s.d. } f(v) = w\} = \{f(v) : v \in V\} \subseteq W$ (0.5P)

b) Da d K-linear ist, gilt $d(0) = 0$ ~~(0.5P)~~

Da $d: \{0\} \to U$ folgt, dass d die Nullabbildung ist. (0.5P)

Da der Bildraum von g durch $\{0\}$ gegeben ist, bildet g jedes Element aus W auf 0 ab.

Somit ist g die Nullabbildung (0.5P)

c) Da g die Nullabbildung ist, gilt, $\ker(g) = W$ ($\overset{\text{nach Voraussetzung}}{=} \operatorname{im}(f)$). (1P)

Somit ist f surjektiv. (1P) ← für surj. ...

d) Da $\ker(e) = \operatorname{im}(d) = \{0\}$ (1P) und eine lineare Abbildung genau dann injektiv ist, wenn der Kern trivial ist. (1P)

bzw. weil $|U| = 1$.

e) Mit dem Dimensionssatz gilt:

$$\dim(V) = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{im}(f) \quad (1.5P)\ \cancel{(1P)} \quad (0.5P \text{ pro Einsetzen})$$

$$\overset{\text{Vor.}}{\underset{c)}{=}} \dim \operatorname{im}(e) + \dim W \quad (1P)$$

$$\overset{d)}{=} \dim U + \dim W \quad (0.5P)$$

Aufgabe 6
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und seien U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V.

(a) Formulieren Sie im Detail aus, was es bedeutet, dass V in die Unterräume U_1, U_2, U_3 zerfällt, dass also gilt:

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$

(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass V genau dann in die Unterräume U_1, U_2, U_3 zerfällt, wenn gilt:

$$\begin{aligned} & U_1 + U_2 + U_3 = V \\ \text{und} \quad & (U_1 + U_2) \cap U_3 = \{0\} \\ \text{und} \quad & (U_1 + U_3) \cap U_2 = \{0\} \\ \text{und} \quad & (U_2 + U_3) \cap U_1 = \{0\}. \end{aligned}$$

(5 Punkte)

(c) Geben Sie ein Beispiel für drei reelle Untervektorräume U_1, U_2, U_3 von $\mathbb{R}^2$ mit $U_1 \neq \{0\}$, $U_2 \neq \{0\}$, $U_3 \neq \{0\}$ und $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$ an. Entscheiden Sie, ob $\mathbb{R}^2$ in diese drei Untervektorräume zerfällt. (2 Punkte)

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) V zerfällt per Definition in die Untervektorräume U_1, U_2, U_3 genau dann, wenn die kanonische Abbildung

$$U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \longrightarrow V$$

$$(u_1, u_2, u_3) \longmapsto u_1 + u_2 + u_3$$

ein Isomorphismus ist.

(b) Nach Notiz 4.22 gilt:

$V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \Leftrightarrow$ (i) $V = \sum_{i=1}^{3} U_i$

(ii) Für alle $u_i \in U_i$, $i = 1,2,3$, gilt: $\sum_{i=1}^{3} u_i = 0 \Rightarrow u_i = 0 \ \forall i$

$(\Rightarrow)$ $V = \sum_{i=1}^{3} U_i$ ist klar wegen (i)

Sei nun für ein $j \in \{1,2,3\}$ $\underline{v} \in U_j \cap (\sum_{i \neq j} U_i)$

Dann lässt sich $\underline{v}$ schreiben als $\underline{v} = \sum_{i \neq j} \underline{v}_i$

Mit $\underline{v}_j = -\underline{v}$ erhalten wir $\sum_{i=1}^{3} \underline{v}_i = 0$

Also folgt wegen (ii): $\underline{v} = -\underline{v}_j = 0$

$(\Leftarrow)$ (i) klar

(ii) Seien $\underline{v}_i \in U_i$ mit $\sum_{i=1}^{3} \underline{v}_i = 0$

Dann gilt für alle $j \in \{1,2,3\}$:

$$\underline{v}_j = -\sum_{i \neq j} \underline{v}_i \in \sum_{i \neq j} U_i$$

Also $\underline{v}_j \in U_j \cap (\sum_{i \neq j} U_i)$ und somit $\underline{v}_j = 0$

Insgesamt folgt $\sum_{i=1}^{3} U_i = V$ und $U_j \cap (\sum_{i \neq j} U_i) = \{0\}$ $\forall j \in \{1,2,3\}$.

(c) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathbb{R}^2$ kann nicht in drei Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \neq \{0\}$ zerfallen, da $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ und $\dim_{\mathbb{R}} U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \geq 3$ gilt.

Aufgabe 6
(Seite 19)