5A-26

Lineare Algebra I: Klausur 2

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Winter 2025/26

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer einfachen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name:
  Matrikelnr.:

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen, solange Sie den folgenden Punkt beachten. Wenn Sie zusätzliche lose Seiten benötigen, geben Sie uns bitte ein Zeichen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben jeweils auf den dafür vorgesehenen Seiten. Machen Sie auf jeder losen Seite klar erkenntlich, welche Aufgabe Sie lösen. Niederschriften, die nicht klar zugeordnet sind, werden nicht korrigiert.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1
Wir betrachten das folgende reelle lineare Gleichungssystem mit einem Parameter $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & sx_2 & & & - & 3x_4 & = & 3s \\ & & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 3 \\ & & sx_2 & + & 3sx_3 & & & = & s \end{array}$$

(a) Stellen Sie die zu diesem Gleichungssytem gehörige erweiterte Matrix $(A \mid \mathbf{b})$ auf. (1 Punkte)

(b) Überführen Sie $(A \mid \mathbf{b})$ durch Zeilenoperationen in eine Matrix, in der die ersten vier Spalten in Zeilenstufenform stehen. (3 Punkte)

(c) Bestimmen Sie alle Werte von s, für die das Gleichungssytem mindestens eine Lösung besitzt. (2 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass die Dimension des Lösungsraums $\mathcal{L}(A)$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems unabhängig vom Wert von s ist, und bestimmen Sie diese Dimension. (2 Punkte)

(e) Lösen Sie das Gleichungsystem im Fall $s = 0$ vollständig. Geben Sie also in diesem Fall eine spezielle Lösung $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{L}(A \mid \mathbf{b})$ und eine Basis von $\mathcal{L}(A)$ an. (2 Punkte)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 1
(Seite 3)

Aufgabe 2

Der Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch Multiplikation mit der folgenden Matrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Vektoren Eigenvektoren von f sind, und geben Sie jeweils die zugehörigen Eigenwerte an:

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{R}[X]$, und bestimmen Sie alle Nullstellen von χ_f . (3 Punkte)

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von f, und berechnen Sie zu jedem Eigenwert a von f die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(f; a)$. (3 Punkte)

(d) Ist der Endomorphismus f diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2
(Seite 7)

Aufgabe 2
(Seite 9)

Aufgabe 3

Kreuzen Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Sie erhalten als Punktzahl für diese Aufgabe die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

(w) (f)

- ☺ ☹ Eine Abbildung von Mengen ist genau dann injektiv, wenn jede Faser aus genau einem Element besteht.
- ☺ ☹ Sei n eine natürliche Zahl ($n \geq 1$). Der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann kommutativ, wenn n eine Primzahl ist.
- ☺ ☹ Für beliebige (2×2)-Matrizen A, B gilt: $A \cdot B = B \cdot A$.
- ☺ ☹ Eine injektive Abbildung zwischen zwei endlichen Mengen mit gleich vielen Elementen ist auch surjektiv.
- ☺ ☹ Es gibt eine wohldefinierte Abbildung $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, die die Restklasse von x abbildet auf die Restklasse von $3x$.
- ☺ ☹ Das Signum der Permuation
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
ist 1.
- ☺ ☹ Die natürlichen Zahlen bilden zusammen mit der gewöhnlichen Addition eine abelsche Gruppe.
- ☺ ☹ Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge aller geraden natürlichen Zahlen und der Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 3 teilbar sind.
- ☺ ☹ Sei M eine Menge, $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Sei $s\colon M \to \mathfrak{P}(M)$ die Abbildung, die ein Element $m \in M$ auf die Teilmenge $\{m\}$ von M abbildet. Diese Abbildung ist injektiv.
- ☺ ☹ Für jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M ist die kanonische Abbildung $M \to M/\sim$ surjektiv.

Aufgabe 4

Kreuzen Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Sie erhalten als Punktzahl für diese Aufgabe die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

(w) (f)

☺ ☹ Die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen von $\mathbb{R}^2$ ist ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

☺ ☹ Für jedes Paar linear unabhängiger Vektoren $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ gilt: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

☺ ☹ Der Nullvektorraum $\{0\}$ besitzt als Basis das Tupel $(\mathbf{0})$.

☺ ☹ Sei $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ein n-Tupel von (Spalten-)Vektoren aus K^m. Das Tupel ist genau dann linear unabhängig, wenn es – aufgefasst als Matrix – Rang n hat.

☺ ☹ Ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sein Rang ungleich Null ist.

☺ ☹ Der Rang einer Matrix ist stets durch die Anzahl der Zeilen begrenzt (also $\mathrm{rk}(A) \leq n$ für jede Matrix A mit n Zeilen).

☺ ☹ Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Zeilen linear unabhängig sind.

☺ ☹ Eine (2×3)-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat.

☺ ☹ Sei $f\colon K^2 \to K^2$ bezüglich der Standardbasis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ von K^2 gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann ist f bezüglich der Basis $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ auf dem Definitionsbereich (links) und der Standardbasis auf dem Wertebereich (rechts) gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

☺ ☹ Sei V ein K-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ ein Skalar $a \in K$ mit $f(\mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{v}$ existiert.

Aufgabe 5

Wir fixieren einen Körper K.

(a) Sei $f\colon V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Definieren Sie $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$, also den Kern und das Bild von f. (2 Punkte)

Wir betrachten nun K-Vektorräume U, V, W und K-lineare Abbildungen d, e, f, g wie folgt:

$$\{\mathbf{0}\} \xrightarrow{d} U \xrightarrow{e} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} \{\mathbf{0}\}.$$

Hier ist jeweils $\{\mathbf{0}\}$ der Nullvektorraum. Wir nehmen zudem an, dass der Kern jeder Abbildung gleich dem Bild der vorherigen Abbildung ist, dass also gilt:

$$\operatorname{im}(d) = \ker(e), \quad \operatorname{im}(e) = \ker(f), \quad \operatorname{im}(f) = \ker(g)$$

Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen folgt:

(b) Die Abbildungen d und g sind die Nullabbildungen. (1 Punkte)

(c) Die Abbildung f ist surjektiv. (2 Punkte)

(d) Die Abbildung e ist injektiv. (2 Punkte)

(e) $\dim V = \dim U + \dim W$. (3 Punkte)

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 5
(Seite 16)

Aufgabe 6

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und seien U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V.

(a) Formulieren Sie im Detail aus, was es bedeutet, dass V in die Unterräume U_1, U_2, U_3 zerfällt, dass also gilt:

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$

(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass V genau dann in die Unterräume U_1, U_2, U_3 zerfällt, wenn gilt:

$$\begin{aligned} & U_1 + U_2 + U_3 = V \\ \text{und} \quad & (U_1 + U_2) \cap U_3 = \{\mathbf{0}\} \\ \text{und} \quad & (U_1 + U_3) \cap U_2 = \{\mathbf{0}\} \\ \text{und} \quad & (U_2 + U_3) \cap U_1 = \{\mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

(5 Punkte)

(c) Geben Sie ein Beispiel für drei reelle Untervektorräume U_1, U_2, U_3 von $\mathbb{R}^2$ mit $U_1 \neq \{\mathbf{0}\}$, $U_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, $U_3 \neq \{\mathbf{0}\}$ und $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$ an. Entscheiden Sie, ob $\mathbb{R}^2$ in diese drei Untervektorräume zerfällt. (2 Punkte)

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 6
(Seite 19)

Aufgabe 6
(Seite 21)