

1. Mengen

1.1 naive „Def.“:

- Menge wird durch Angabe ihrer Elemente definiert
- zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben

1.2 Notation

$m \in M \iff m$ ist ein Element von M
(oder $M \ni m$)

$m \notin M \iff \neg (m \in M)$ nicht, s.o.

Beispiele:

Mengenklammern

$$M := \{2, -5, 8, \pi\}$$

↑

linke Seite wird
definiert durch rechte

$$= \{\pi, 8, 2, -5\} \quad \text{Reihenfolge egal}$$

$$= \{\pi, 8, 8, 8, 8, 2, -5\} \quad \text{Mehrfach-} \\ \text{nennung egal}$$

$$2 \in M$$

$$7 \notin M$$

wichtige Beispiele

$$\emptyset := \{ \} \quad \text{"leere Menge"}$$

$$\mathbb{N} := \text{natürliche Zahlen} \\ = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{N}_0 := \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{Z} := \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{Q} := \text{rationale Zahlen (Brüche)}$$

$$= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \overset{\text{und}}{\wedge} q \in \mathbb{Z} \overset{\text{und}}{\wedge} q \neq 0 \right\}$$

"mit der Eigenschaft, dass..."

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots \quad - \text{Mehrfachnennung} \\ \text{egal, s.o.}$$

$$\mathbb{R} := \text{reelle Zahlen} \rightarrow \text{Analysis I}$$

$$\mathbb{C} := \text{komplexe Zahlen}$$

1.3 Def.: Eine Teilmenge N einer Menge M ist eine Menge, deren Elemente allesamt auch in M liegen.

Notation: $N \subseteq M$

In Symbolen $N \subseteq M \Leftrightarrow (x \in N \Rightarrow x \in M)$
 $\Leftrightarrow (\forall x \in N : x \in M)$
↑ ↑
„für alle“ „gilt“

$N \not\subseteq M \Leftrightarrow \neg (N \subseteq M)$
 $\Leftrightarrow \neg (\forall x \in N : x \in M)$
 $\Leftrightarrow \exists x \in N : \neg (x \in M)$
 $\Leftrightarrow \exists x \in N : x \notin M$

$\neg (\forall \dots : \dots) \Leftrightarrow \exists \dots : \neg (\dots)$

$N \subsetneq M \Leftrightarrow (N \subseteq M \wedge N \neq M)$

($N \subset M$ ist mehrdeutig und kann $N \subseteq M$ oder $N \subsetneq M$ bedeuten.)

Beispiele: $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\{2, -5, 8, \pi\} \subseteq \mathbb{R}$

$\{2, -5, 8, \pi\} \not\subseteq \mathbb{Z}$ (da $\pi \notin \mathbb{Z}$)

1.4 Notiz: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie wechselseitig Teilmengen voneinander sind.

$N = M \Leftrightarrow (N \subseteq M \wedge N \supseteq M)$

Konstruktionen von/mit Teilmengen

1.5 Def. (durch Eigenschaft definierte Teilmenge)

M Menge

E Eigenschaft, die die Elemente von M haben können oder auch nicht

(formaler: $E(m)$ ist eine Aussage, deren Wahrheitswert abhängt von $m \in M$)

Dann ist

$\{m \in M \mid m \text{ hat Eigenschaft } E\}$
(formaler: $\{m \in M \mid E(m)\}$)

die Teilmenge von M , die besteht aus allen Elementen, die Eigenschaft E haben.

Beispiel: $M := \{2, -5, 8, \pi\}$

$$\{m \in M \mid m \geq 0\} = \{2, 8, \pi\}$$

$$\{m \in M \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{2, -5, 8\}$$

1.6 Warnung: Es gibt kein Universum

- Es gibt keine Menge, die als Elemente alle Mengen hat

Beweis: durch Widerspruch

Annahme: Es gibt so eine Menge $\mathcal{U}$,
die alle Mengen als Elemente hat.

Betrachte Teilmenge

$$T := \{ M \in \mathcal{U} \mid M \notin M \}$$

Es muss genau eine der Aussagen

$$T \in T \quad \text{oder} \quad T \notin T$$

gelten („tertium non datur“).

Falls $T \in T$, folgt $T \notin T$.

Falls $T \notin T$, folgt $T \in T$.

Beweisende



Hier stößt der naive Zugang zu Mengen
offenbar an seine Grenzen – ungeeignet als
Grundlage für eine „Theorie der Mengen“.

Trotzdem ausreichend für Lineare Algebra.

M Menge

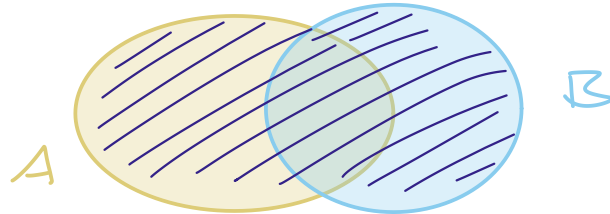
$A, B, C \subseteq M$

1.7 Def.:

$$A \cup B := \{m \in M \mid m \in A \vee m \in B\}$$

oder

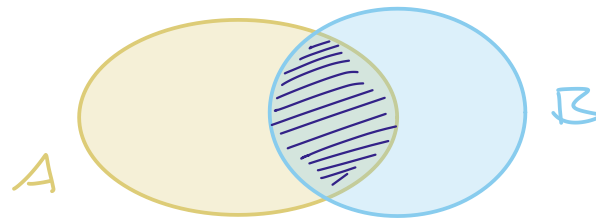
Vereinigung



$$A \cap B := \{m \in M \mid m \in A \wedge m \in B\}$$

und

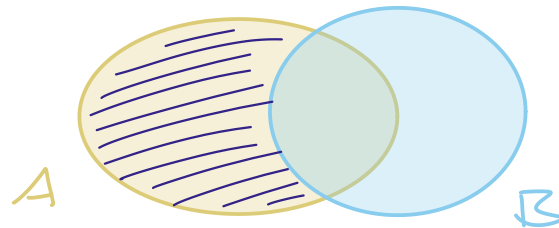
Schnitt



$$A \setminus B := \{m \in M \mid m \in A \wedge m \notin B\}$$

Differenz

„A ohne B“



$M \setminus B$ Komplement von B in M

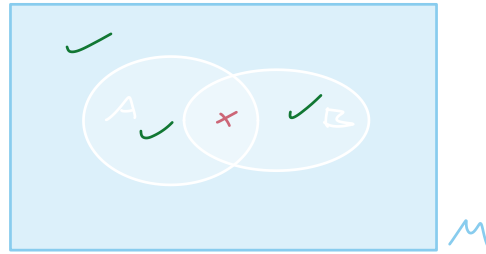
A und B sind disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$.

In diesem Fall schreiben wir gelegentlich

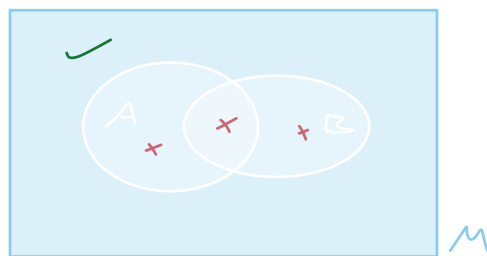
$A \dot{\cup} B$ für $A \cup B$.

1.8 Satz (de-Morgansche Regel)

$$(a) \quad M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

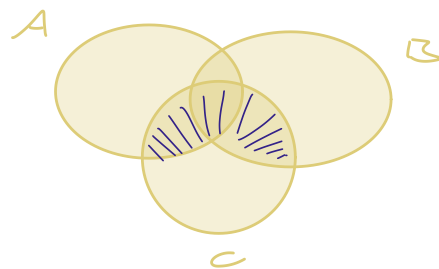


$$(b) \quad M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$$

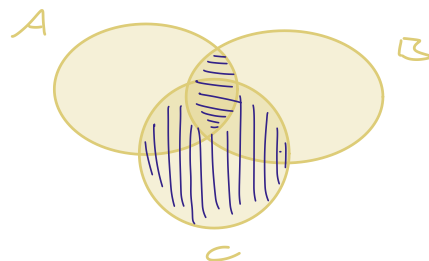


1.9 Satz (Distributivität)

$$(a) \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$



$$(b) \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$



Beweise zu 1.8 & 1.9:

zurückführen auf elementare Aussagenlogik

z.B. zu 1.8:

Beachte

$$\begin{array}{l} \neg (X \vee Y) \text{ ist äquivalent zu } \neg X \wedge \neg Y \\ \neg (X \wedge Y) \text{ ist äquivalent zu } \neg X \vee \neg Y \end{array}$$

a: Für $x \in M$ ist zu zeigen:

$$x \in M \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

Das machen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} x \in M \setminus (A \cap B) &\stackrel{\text{Def. } \setminus}{\Leftrightarrow} x \in M \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\stackrel{\text{Def. } \notin}{\Leftrightarrow} x \in M \wedge \neg (x \in A \cap B) \\ &\stackrel{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} x \in M \wedge \neg (x \in A \wedge x \in B) \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{\Leftrightarrow} x \in M \wedge (\neg (x \in A) \vee \neg (x \in B)) \\ &\stackrel{\text{Def. } \notin}{\Leftrightarrow} x \in M \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in M \wedge x \notin A) \\ &\quad \vee (x \in M \wedge x \notin B) \end{aligned}$$

allgemein:

$$X \wedge (Y \vee Z) \Leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z))$$

$$\stackrel{\text{Def. } \setminus}{\Leftrightarrow} (x \in M \setminus A) \vee (x \in M \setminus B)$$

b: analog.

□

Allgemeiner:

M Menge

I Menge „Indexmenge“

für jedes $i \in I$ eine Teilmenge $A_i \subseteq M$

1.10 Def.:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{m \in M \mid \exists i \in I: m \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{m \in M \mid \forall i \in I: m \in A_i\}$$

Für $I = \{1, 2, \dots, n\}$ also

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

Beispiel:

(a) $M = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}$

$$A_i = \{1, 2, \dots, i\}$$

also

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\}, \\ A_2 &= \{1, 2\}, \\ A_3 &= \{1, 2, 3\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{N}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{1\}$$

(b) $I = \mathbb{R}$

$$M_i = [0, i] \subseteq \mathbb{R}$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{R}} M_i = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

1.8' Satz (de Morgan)

$$M \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i)$$

$$M \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (M \setminus A_i)$$

1.9' Satz (Distributivität)

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap C = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap C)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup C = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup C)$$

Beweise zu 1.8' & 1.9':

Wie oben. Beachte:

$\neg (\forall m \in M: X(m))$	ist äquiv. zu	$\exists m \in M: \neg X(m)$
$\neg (\exists m \in M: X(m))$	ist äquiv. zu	$\forall m \in M: \neg X(m)$

1.8'a:

$$x \in M \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \stackrel{\text{Def. } \setminus}{\iff} x \in M \wedge x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$$

$$\stackrel{\text{Def. } \notin}{\iff} x \in M \wedge \neg (x \in \bigcap_{i \in I} A_i)$$

$$\stackrel{\text{Def. } 10}{\iff} x \in M \wedge \neg (\forall i \in I: x \in A_i)$$

$$\stackrel{\text{s.o.}}{\iff} x \in M \wedge \exists i \in I: \neg (x \in A_i)$$

$$\stackrel{\text{Def. } \notin}{\iff} x \in M \wedge \exists i \in I: x \notin A_i$$

$$\stackrel{\text{Logik}}{\iff} \exists i \in I: (x \in M \wedge x \notin A_i)$$

$$\stackrel{\text{Def. } \setminus}{\iff} \exists i \in I: (x \in M \setminus A_i)$$

$$\stackrel{\text{Def. } 10}{\iff} x \in \bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i) \quad \square$$

Konstruktionen mit abstrakten Mengen

1.11 Def.: I eine Menge

Ein I -Tupel ist eine Familie von Elementen $(x_i)_{i \in I}$, die durch die Elemente von I indiziert werden. Zwei I -Tupel sind gleich, wenn sie für jedes $i \in I$ denselben Eintrag haben:

$$(x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} \iff (\forall i \in I: x_i = y_i)$$

Für $I = \{1, \dots, n\}$ sprechen wir von n -Tupeln.
In diesem Fall:

$$(x_i)_{i \in I} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\begin{array}{c} (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \parallel \\ (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \iff \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \parallel \\ y_1 \end{array} \wedge \begin{array}{c} x_2 \\ \parallel \\ y_2 \end{array} \wedge \dots \wedge \begin{array}{c} x_n \\ \parallel \\ y_n \end{array} \right)$$

Beispiel:

$$(2, -5, 8, \pi) \neq (-5, 2, 8, \pi)$$

$$(2, 2, 2, 5) \neq (2, 5, 5, 5)$$

Im Folgenden: I Menge,

für jedes $i \in I$ eine Menge M_i

1.12 Def.: Die disjunkte Vereinigung der Mengen M_i ist

$$\bigsqcup_{i \in I} M_i := \{ (x, i) \mid i \in I, x \in M_i \}$$

↑ großes umgedrehtes π

$$\left(\bigsqcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} M_i = M_1 \sqcup M_2 \sqcup \dots \sqcup M_n \right)$$

Beispiel:

(a) $I = \{1, 2\}$

$$M_1 = \{a, b\}$$

$$M_2 = \{a, c\}$$

$$M_1 \cup M_2 = \{a, b, c\}$$

← 3 Elemente

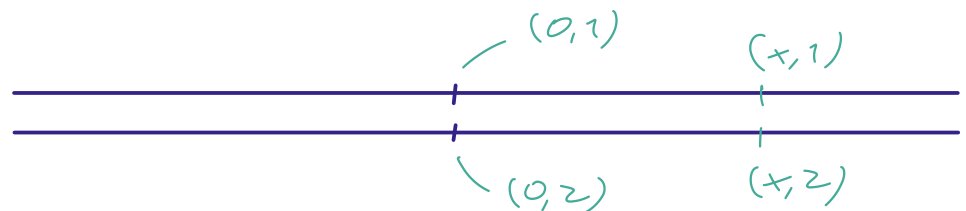
$$M_1 \sqcup M_2 = \{ (a, 1), (b, 1), (a, 2), (c, 2) \}$$

← 4 Elemente

(b) $I = \{1, 2\}$

$$M_1 = M_2 = \mathbb{R}$$

$$M_1 \sqcup M_2:$$



1.13 Def.: Das (kartesische) Produkt der Mengen M_i ist

$$\prod_{i \in I} M_i = \{ (x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I: x_i \in M_i \}$$

$$\left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} M_i = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \right)$$

Sind alle M_i gleich, sagen wir $\forall i \in I: M_i = M$, schreiben wir auch

$$M^I := \prod_{i \in I} M$$

$$(n \in \mathbb{N}: \quad M^n := \underbrace{M \times \dots \times M}_{n \text{ Faktoren}})$$

$$\text{Konvention: } \prod_{i \in \emptyset} := \{*\}$$

Menge mit genau einem Element

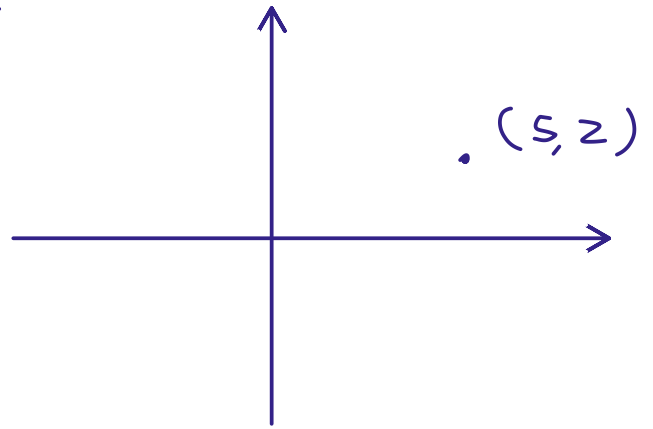
Beispiel:

$$(a) \ I = \{1, 2\}, \quad M_1 = \{a, b, c\}, \quad M_2 = \{-1, 1\}$$

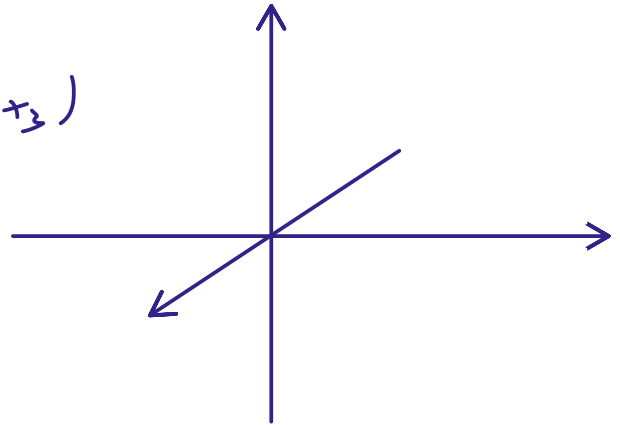
$$M_1 \times M_2 = \{ (a, 1), (a, -1), \\ (b, 1), (b, -1), \\ (c, 1), (c, -1) \}$$

$$(b) \quad I = \{1, 2\}, \quad M_1 = M_2 = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



$$(c) \quad \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3)$$



$$(d) \quad \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

1.14 Auswahlaxiom

Für beliebige Indexmenge I und beliebige nicht-leere Mengen M_i ($i \in I$) ist $\prod_{i \in I} M_i$ nicht leer.

Klingt offensichtlich, ist aber in einer formalen „Theorie der Mengen“ eine zusätzliche Annahme (ein „Axiom“).

1.15 Def.: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M .

$$\mathcal{P}(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$$

Beispiel:

$$(a) \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$(b) \mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$