

'Äquivalenzrelationen

1.27 Def.: Eine Relation $\sim$ auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R_{\sim} \subseteq M \times M$.

Notation: für $m, n \in M$:

$$m \sim n \Leftrightarrow (m, n) \in R_{\sim}$$

↑
„m steht in Relation zu n“

Beispiel:

(i) $M = \mathbb{Z}$, $R_{\sim} := \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \leq y \}$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$$

reflexiv $(x \leq x)$

nicht symmetrisch ($1 \leq 2$ aber $2 \not\leq 1$)

— keine Äquivalenzrelation

(ii) $M = \mathbb{Z}$, $R_{\sim} := \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y \}$

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y$$

reflexiv ✓

symmetrisch ✓

transitiv $(x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$ ✓

Äquivalenzrelation ✓

(iii) $M = \mathbb{Z}$, $R_{\sim} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$x \sim y \text{ für alle } x, y \in \mathbb{Z}$$

(iv) Eine Abbildung $f: M \longrightarrow B$ definiert eine Relation $\sim_f$ durch

$$R_{\sim_f} := \{ (m, n) \in M \times M \mid f(m) = f(n) \}$$

(also $m \sim_f n \Leftrightarrow f(m) = f(n)$)

Äquivalenzrelation ✓ (ähnlich wie iii)

1.28 Def.: Relation $\sim$ auf M ist...

... reflexiv $\Leftrightarrow \forall m \in M: m \sim m$

... symmetrisch $\Leftrightarrow \forall m, n \in M: (m \sim n \Leftrightarrow n \sim m)$

... transitiv $\Leftrightarrow \forall l, m, n \in M:$

$$l \sim m \wedge m \sim n \Rightarrow l \sim n$$

Sind alle 3 Eigenschaften erfüllt, ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

1.29 Def.: Sei $\sim$ Äquivalenzrelation auf M .

Für $m \in M$ heißt

$$[m] := \{ m' \in M \mid m' \sim m \} \subseteq M$$

Äquivalenzklasse von m . Die Menge der Äquivalenzklassen

$$\frac{M}{\sim} := \{ [m] \mid m \in M \} \subseteq \mathcal{P}(M)$$

↑
„ M modulo $\sim$ “

heißt Quotientenmenge von M bezüglich $\sim$.

Die (surjektive) Abbildung

$$\begin{array}{ccc} q: M & \longrightarrow & \frac{M}{\sim} \\ m & \longmapsto & [m] \end{array}$$

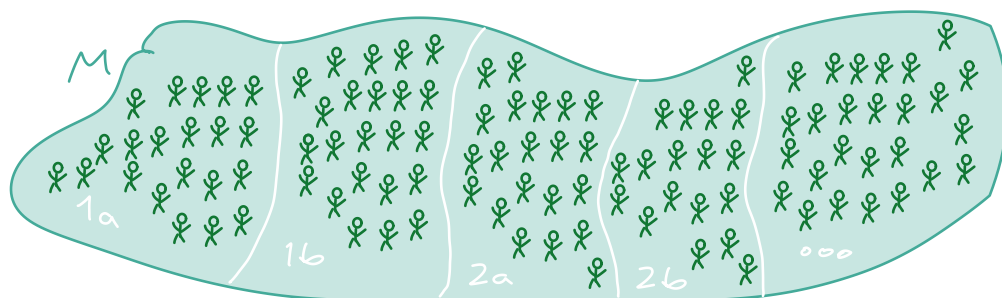
heißt kanonische Projektion.

Bsp.: $M = \{\text{alle Schüler einer Schule}\}$

$m \sim n \Leftrightarrow m \text{ und } n \text{ gehen in dieselbe Klasse}$

In diesem Fall ist

$[m] = \text{Klasse von } m$ (aufgefasst als Teilmenge von M)



$\frac{M}{\sim} = \{\text{Klassen der Schule}\}$

(z.B. $\{1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b\}$)

$M \longrightarrow \frac{M}{\sim}$

Schüler $m \mapsto \text{Klasse von } m$

1.30 Notiz: $[m] = [n] \Leftrightarrow m \sim n$

Beweis:

($\Rightarrow$) Wegen Reflexivität: $m \in [m]$,
also nach Annahme $m \in [n]$, d.h. $m \sim n$.

($\Leftarrow$) Sei $m \sim n$.

$[m] \subseteq [n]$: Für $x \in [m]$ ist $x \sim m$.

Wegen Transitivität folgt aus $x \sim m \wedge m \sim n$:
 $x \sim n$, also $x \in [n]$.

$[n] \subseteq [m]$: Für $x \in [n]$ ist $x \sim n$.

Wegen Symmetrie gilt $n \sim m$.

Wegen Transitivität folgt: $x \sim m$, also $x \in [m]$.

□

1.3.1 Satz: Die Äquivalenzklassen bilden eine Partition von M , d.h.:

(a) verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt:

$$([m] \neq [n] \Rightarrow [m] \cap [n] = \emptyset)$$

(b) Vereinigung aller Klassen ist M :

$$\left(\bigcup_{m \in M} [m] = M \right)$$

Beweis:

a: Wir zeigen:

$$\neg ([m] \cap [n] = \emptyset) \Rightarrow \neg ([m] \neq [n]),$$

$$\text{also: } \exists x \in [m] \cap [n] \Rightarrow [m] = [n].$$

(Beweis durch Kontraposition.)

Sei also $x \in [m] \cap [n]$. Dann gilt:

$$x \in [m] \quad \text{und} \quad x \in [n],$$

$$\text{d.h.} \quad x \sim m \quad \text{und} \quad \underline{x \sim n}.$$

Wegen Symmetrie gilt auch:

$$\underline{m \sim x}$$

Also folgt aus Transitivität: $m \sim n$.

Also gilt: $[m] = [n]$ (siehe Notiz 1.30).

b: Selbststudium (benutze Reflexivität: $m \in [m]$)

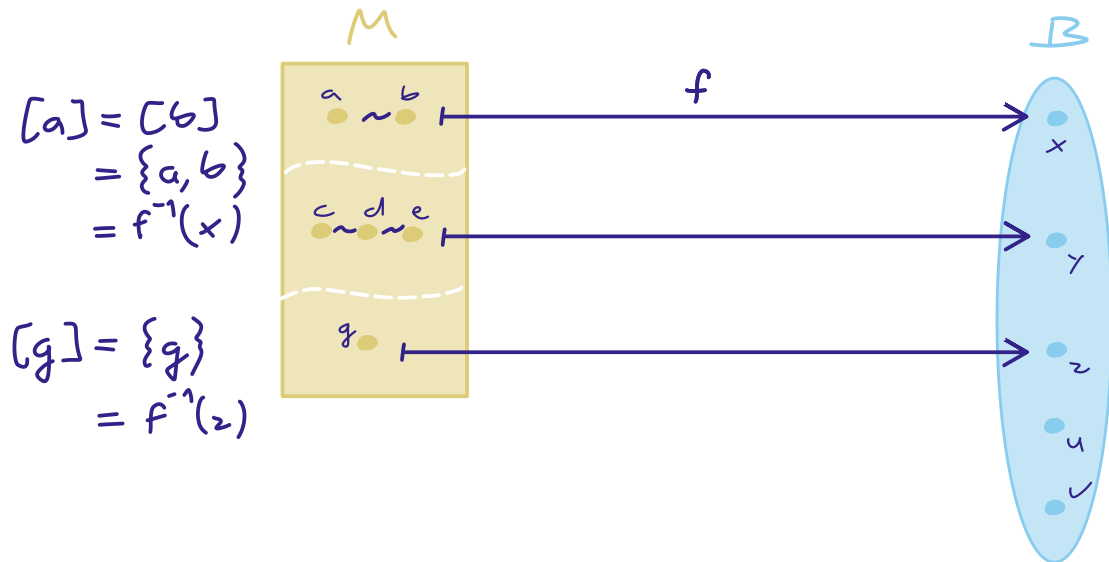
□

Beispiel: Sei $f: M \longrightarrow B$ Abbildung,

$$m \sim_f n : \Leftrightarrow f(m) = f(n) \quad (\text{wie oben})$$

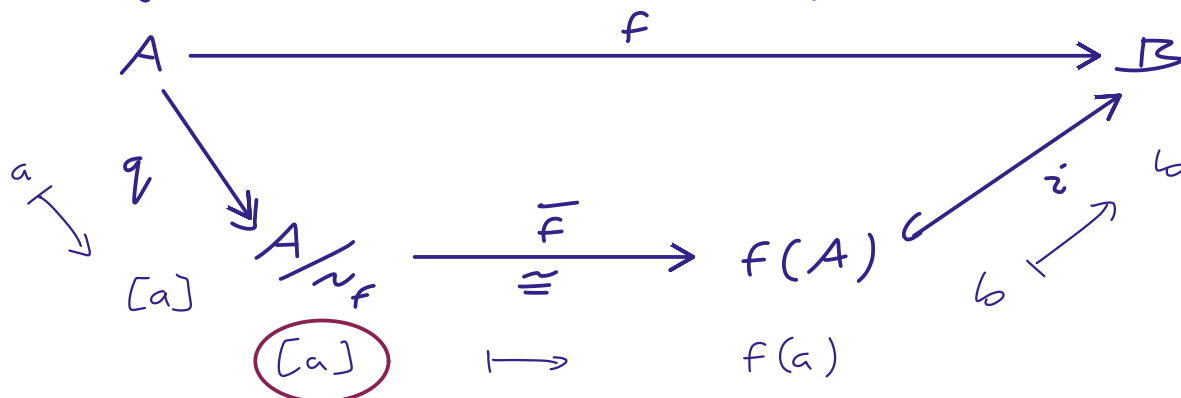
In diesem Beispiel sind die Äquivalenzklassen genau die Fasern von f :

$$[m] = f^{-1}(f(m))$$



1.32 Isomorphiesatz für Mengen

Jede Abbildung $f: A \rightarrow B$ lässt sich kanonisch zerlegen („faktorisieren“) in folgende Komposition:



Hier ist q surjektiv, $\bar{f}$ ein Isomorphismus, i injektiv.

Beweis:

q surjektiv: ✓

i injektiv: ✓

$\bar{f}$ wohldefiniert:

Angenommen, $[a] = [a']$.

Wir müssen prüfen, dass dann laut Abb.-Vorschrift gilt: $\bar{f}([a]) = \bar{f}([a'])$, also $f(a) = f(a')$.

Das ist in der Tat der Fall, denn

$[a] = [a']$ impliziert $a \sim_f a'$ (Notiz 1.30),

und das bedeutet gerade $f(a) = f(a')$.

$\bar{f}$ surjektiv: Selbststudium

$\bar{f}$ injektiv: Angenommen, $\bar{f}([a]) = \bar{f}([a'])$.

Dann ist $f(a) = f(a')$,

also $a \sim_f a'$,

also $[a] = [a']$ (Notiz 1.30).

$i \circ \bar{f} \circ q = f$: Selbststudium

□

Beispiel:

