

Gruppenhomomorphismen

2.10 Def.: $(G, \cdot)$ und $(K, *)$ Gruppen

Ein Gruppenhomomorphismus $f: (G, \cdot) \longrightarrow (K, *)$

ist eine Abbildung $f: G \longrightarrow K$, für die gilt:

$$\forall x, y \in G: f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$$

Bsp.:

(a) $(\mathbb{Z}, +) \hookrightarrow (\mathbb{Q}, +)$ Gruppenhomomorphismus
 $x \mapsto x$

allgemeiner:

$(H, \cdot) \hookrightarrow (G, \cdot)$ Gruppenhomomorphismus
für jede Untergruppe H
von $(G, \cdot)$

(b) $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ Gruppenhomomorphismus,
 $x \mapsto 5^x$ denn
 $(-1 \mapsto \frac{1}{5})$ $5^{x+y} = 5^x \cdot 5^y$

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$ **kein** Gruppenhomomorphismus,
 $x \mapsto x$ z.B. $2 \cdot 3 \neq 2 + 3$

(d) Die konstante Abb.

$$(G, \cdot) \longrightarrow (K, *)$$
$$g \mapsto 1_K$$

ist ein Gruppenhomomorphismus für beliebige
Gruppen $(G, \cdot)$ und $(K, *)$.

2.11 Notiz: Für jeden Gruppenhomomorphismus

$f: (G, \cdot) \longrightarrow (K, *)$ gilt:

(a) $f(1_G) = 1_K$

(b) $\forall x \in G: f(x^{-1}) = \underline{f(x)^{-1}}$

↑
Inverses
in G

Inverses in K

Beweis:

a: Es gilt:

$$1_G \cdot 1_G = 1_G, \quad | \quad f$$

also

$$f(1_G \cdot 1_G) = f(1_G),$$

also

$$f(1_G) * f(1_G) = f(1_G). \quad | \quad * f(1_G)^{-1}$$

$$\text{also } f(1_G) * \underline{f(1_G)^{-1}} = \underline{f(1_G) * f(1_G)^{-1}},$$

$$\text{also } f(1_G) * 1_K = 1_K$$

$$\text{also } f(1_G) = 1_K$$

b: Es gilt: $x \cdot x^{-1} = 1_G = x^{-1} \cdot x, \quad | \quad f$

$$\text{also } f(x \cdot x^{-1}) = f(1_G) = f(x^{-1} \cdot x),$$

also wegen Def. 2.10 und (a):

$$f(x) * \underline{f(x^{-1})} = 1_K = \underline{f(x^{-1})} * f(x).$$

Aus Eindeutigkeit von inversen Elementen in $(K, *)$ (Notiz 2.4) folgt also: $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

2.12 Notiz:

(a) Für jede Gruppe $(G, \cdot)$ ist $\text{id}: (G, \cdot) \xrightarrow{\quad} (G, \cdot)$

(b) Sind $(G_1, \cdot) \xrightarrow{g} (G_2, *)$

und $(G_2, *) \xrightarrow{f} (G_3, \star)$

Gruppenhomomorphismen, so ist auch

$$(G_1, \cdot) \xrightarrow{f \circ g} (G_3, \star)$$

ein Gruppenhomomorphismus.

2.13 Def.: Ein Gruppenisomorphismus ist ein Gruppenhomomorphismus $f: (G, \cdot) \longrightarrow (K, *)$, für den ein Gruppenhomomorphismus

$$(G, \cdot) \longleftarrow (K, *) : g$$

existiert, sodass gilt: $f \circ g = \text{id}_K$ und $g \circ f = \text{id}_G$.

Zwei Gruppen sind **isomorph**, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

2.14 f Gruppenhomomorphismus

Satz: f Gruppenisomorphismus $\Leftrightarrow$ f bijektiv

Def.: f Gruppenepimorphismus $\Leftrightarrow$ f surjektiv

Def.: f Gruppenmonomorphismus $\Leftrightarrow$ f injektiv

Beweis:

($\Rightarrow$) f ist insbesondere ein Isomorphismus von Mengen, also bijektiv nach Satz 1.23.

($\Leftarrow$) Sei $f: (G, \cdot) \longrightarrow (K, *)$ bijektiver Gruppenhomo. Nach Satz 1.23 existiert jedenfalls eine Abbildung

$$G \longleftarrow K : g$$

mit $f \circ g = \text{id}_K$ und $g \circ f = \text{id}_G$.

n.z.z.: g ist Gruppenhomomorphismus.

Seien dazu $x, y \in K$.

$$\begin{aligned} g(x * y) &= g(\text{id}_K(x) * \text{id}_K(y)) && \downarrow f \circ g = \text{id}_K \\ &= g(f(g(x)) * f(g(y))) && \downarrow f \text{ Gruppen-} \\ &= g(f(g(x) \cdot g(y))) && \text{homo} \\ &= \text{id}_G(g(x) \cdot g(y)) && \downarrow g \circ f = \text{id}_G \\ &= g(x) \cdot g(y) \end{aligned}$$

□

2.15 $f: (G, \cdot) \longrightarrow (K, *)$ Gruppenhomo.

Def.: $\text{im}(f) := f(G) \subseteq K$ Bild von f

$\text{Ker}(f) := f^{-1}(1_K) \subseteq G$ Kern von f

Satz: Bild und Kern sind Untergruppen von $(K, *)$ bzw. $(G, \cdot)$.

Beweis:

ker: u1: $1_G \in \text{Ker } f$, denn $f(1_G) = 1_K$ nach 2.11.
 $\parallel$
 $f^{-1}(1_K)$

u2: $\forall x, y \in \text{Ker } f: x \cdot y \in \text{Ker } f$

$x, y \in \text{Ker } f$ bedeutet: $f(x) = 1_K$ und $f(y) = 1_K$

Also ist auch $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$
 $= 1_K \cdot 1_K = 1_K,$

d.h. $x \cdot y \in \text{Ker } f$.

u3: $\forall x \in \text{Ker } f: x^{-1} \in \text{Ker } f$

$x \in \text{Ker } f$ bedeutet $f(x) = 1_K$

also $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = (1_K)^{-1} = 1_K,$
 $\uparrow$
2.11(b)

d.h. $x^{-1} \in \text{Ker } f$.

im: Selbststudium.



2.16 Injektivitätskriterium

Ein Gruppenhomomorphismus ist genau dann injektiv, wenn sein Kern trivial ist, also nur aus dem **neutralen** Element besteht.

Beweis: $f: (G, \cdot) \longrightarrow (K, *)$

($\Rightarrow$) injektiv heißt, jede Faser hat höchstens ein Element.

Wegen $f(1_G) = 1_K$ wissen wir bereits

$$1_G \in f^{-1}(1_K),$$

also hat die Faser $f^{-1}(1_K) = \ker f$ genau ein Element.

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun an $\ker f = \{1_G\}$.

Seien $x, y \in G$ mit (#) $f(x) = f(y)$.

$$\text{Dann ist } f(x \cdot y^{-1}) = f(x) * f(y^{-1})$$

Def. 2.10

$$= f(x) \cdot f(y)^{-1}$$

2.11 (b)

$$\stackrel{(\#)}{=} f(x) \cdot f(x)^{-1}$$

$$= 1_K,$$

d.h. $x \cdot y^{-1} \in \ker f$.

Da $\ker f = \{1_G\}$ folgt: $x \cdot y^{-1} = 1_G$. $\quad | \cdot y$

Daraus folgt:

$$x = y.$$

□

