

Quotientengruppen

2.17 Def.: $(G, \cdot)$ Gruppe, H Untergruppe

(a) Die durch H definierten Äquivalenzrelation auf G sind gegeben durch

$$x \sim_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H$$

$$x \sim_H y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in H$$

(b) Die Linksnebenklassen von H in G sind die Teilmengen

$$g \cdot H = \{g \cdot h \mid h \in H\} \quad (g \in G),$$

die Rechtsnebenklassen sind die Teilmengen

$$H \cdot g = \{h \cdot g \mid h \in H\}.$$

2.18 Satz:

(a) $\sim_H$ und $H \sim$ sind tatsächlich Äquivalenzrelationen.

(b) Die Linksebenklassen sind die Äquivalenzklassen

bzgl. $\sim_H$,

die Rechtsebenklassen sind die Äquivalenzklassen

bzgl. $H \sim$.

Beweis:

a: $\sim_H$ reflexiv: $x \sim_H x$, denn $x^{-1}x = 1 \in H$

$\sim_H$ symmetrisch: Sei $x \sim_H y$, also $x^{-1}y \in H$.

Dann ist auch $y^{-1}x = y^{-1}(x^{-1})^{-1} = (x^{-1}y)^{-1} \in H$

Das bedeutet $y \sim_H x$.

$\sim_H$ transitiv: Ist $x^{-1}y \in H$ und $y^{-1}z \in H$, so ist
auch $x^{-1}z = (x^{-1}y) \cdot (y^{-1}z) \in H$

Also ist $\sim_H$ Äquivalenzrelation.

Analog: $H \sim$ Äquivalenzrelation.

b:

Äquivalenzklasse bzgl. $H \sim$

$$x \in [y] \iff x \sim_H y$$

Notiz 1.30

$$\iff x^{-1}y \in H$$

Def. $\sim_H$

$$\iff \exists h \in H: x^{-1}y = h$$

$$\iff \exists h \in H: x^{-1} = h \cdot y^{-1}$$

$$\iff \exists h \in H: x = y \cdot h^{-1}$$

$$\iff \exists \tilde{h} \in H: x = y \cdot \tilde{h}$$

$$\iff x \in y \cdot H$$

$\downarrow \cdot y^{-1} \uparrow \cdot y$
 $\uparrow (\cdot)^{-1}$

$\downarrow$ wähle $\tilde{h} = h^{-1}$ $\uparrow$ wähle $h = \tilde{h}^{-1}$

Das heißt: $[y] = y \cdot H$.

Analog für $H \sim$ und $H \cdot y$.

□

Notation: $G/H := G/\sim_H$ (= Menge aller Links-
nebenklassen von H in G)



Im Allgemeinen ist G/H keine Gruppe
— aber siehe Satz 2.22 unten.

Beispiel: $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$G = (\mathbb{Z}, +)$$

$$H = n \cdot \mathbb{Z} = \{ \text{ganzzahlige Vielfache von } n \}$$

Nebenklasse, die durch $x \in \mathbb{Z}$ definiert wird:

$$[x] := x + n \cdot \mathbb{Z} = \{ x + n \cdot z \mid z \in \mathbb{Z} \}$$

$$[x] = [x+n] = [x+2n] = \dots$$

Jede Nebenklasse hat genau einen Repräsentanten
 x für den gilt: $0 \leq x < n$.

Für dieses x gilt:

$$[x] = \left\{ z \in \mathbb{Z} \mid \begin{array}{l} \text{Rest von } z \text{ bei Division} \\ \text{durch } n \text{ ist } x \end{array} \right\}$$

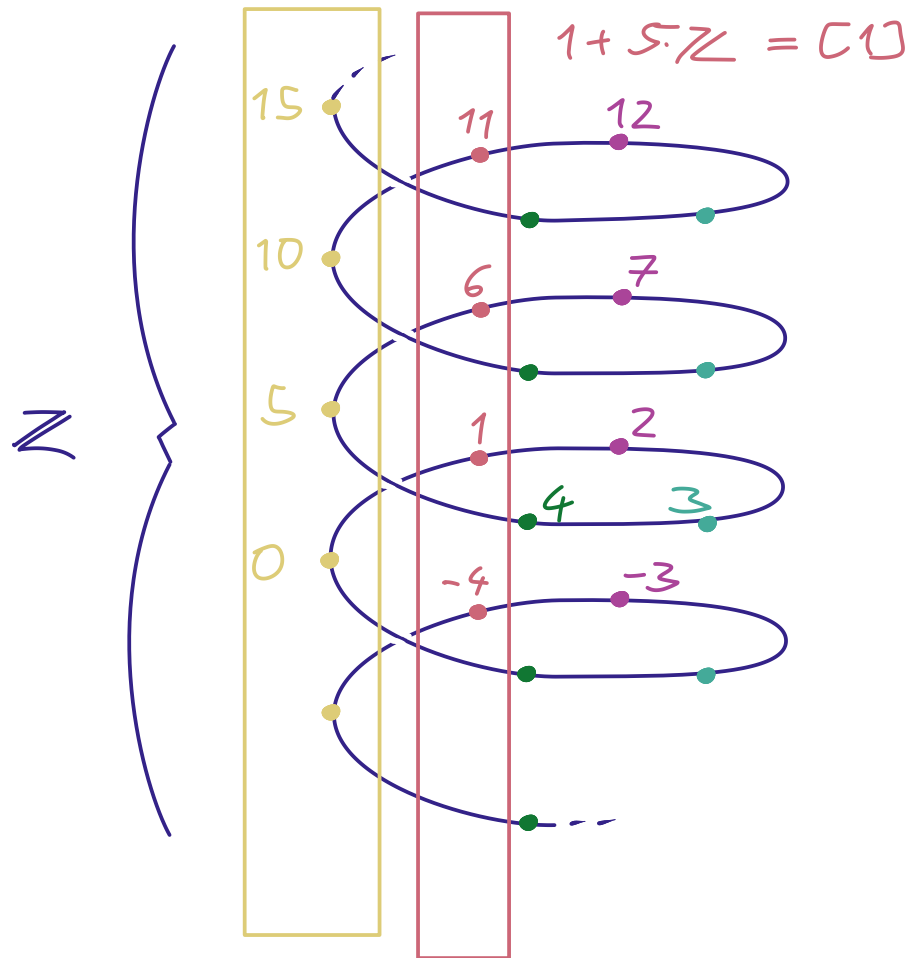
z.B.: $n = 2$

$$\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} = \{ [0], [1] \}$$

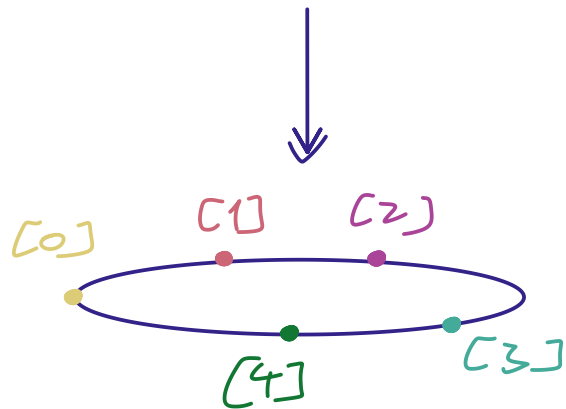
↖ Menge der geraden Zahlen
↗ Menge der ungeraden Zahlen

z.B. $n=5$

$$H = 5 \cdot \mathbb{Z} = [0]$$



$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$



2.20 Def: Eine Untergruppe $(H, \cdot) \subseteq (G, \cdot)$ normal, wenn für jedes $g \in G$ gilt: $g \cdot H = H \cdot g$

$$g \cdot H = \{g \cdot h \mid h \in H\}$$

$$H \cdot g = \{h \cdot g \mid h \in H\}.$$

2.21 Notiz: Jeder Untergruppe einer abelschen Gruppe ist normal.

Für Teilmengen $A, B \subseteq G$ sei

$$A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Das definiert eine assoziative Verknüpfung auf $\mathcal{R}(G)$. In dieser Notation ist $g \cdot H = \{g\} \cdot H$.

2.22 Satz: $(H, \cdot) \leq (G, \cdot)$ normale Untergruppe

(a) Für alle $x, y \in G$ ist $(x \cdot H) \cdot (y \cdot H) = (x \cdot y) \cdot H$.

(b) Die Verknüpfung

$$\begin{aligned} G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (x \cdot H, y \cdot H) &\mapsto (x \cdot y) \cdot H \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und definiert eine Gruppenstruktur auf G/H .

(c) Für diese Gruppenstruktur ist die kanonische Projektion $G \longrightarrow G/H$ ein Gruppenhomomorphismus.
 $x \mapsto x \cdot H$

Beweis:

$$a: \{x\} \cdot \underbrace{H \cdot \{y\}} \cdot H = \{x\} \cdot \{y\} \cdot H \cdot H \stackrel{(*)}{=} \{x \cdot y\} \cdot H$$

$$*: H \cdot H = H:$$

($\subseteq$) ✓

($\supseteq$) Jedes $h \in H$ können wir schreiben als $1 \cdot h \in H \cdot H$

b: Wir sehen aus (a), dass sich die Verknüpfung beschreiben lässt als $G/H \times G/H \longrightarrow G/H$
 $(A, B) \mapsto A \cdot B$

Das ist offenbar unabhängig von Wahlen.

Also ist diese Verknüpfung wohldefiniert.

assoziativ: folgt aus Assoziativität von $\cdot$ auf G

neutrales Element: $1 \cdot H = H$

Inverse: $(x \cdot H)^{-1} = x^{-1} \cdot H$

c: Selbststudium. □

Notation: Schreiben wir $[x]$ für $x \cdot H$, hat die Verknüpfung auf G/H die Form

$$[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{in } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}: \quad [1] + [4] &= [1+4] = [5] = [0] \\ [2] + [1] &= [3] \\ [4] + [4] &= [8] = [3] \end{aligned}$$

$$\text{in } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}: \quad [1] + [1] = [0]$$

2.23 Satz: Für einen Gruppenhomomorphismus

$$f: (G, \cdot) \longrightarrow (K, *) \quad \text{ist} \quad \ker f \sim = \sim_f = \sim_{\ker f}.$$

Daher gilt für alle $g \in G$:

$$(\ker f) \cdot g = f^{-1}(f(g)) = g \cdot (\ker f)$$

2.24 Korollar: Der Kern ist stets normal.

Beweis des Satzes:

$$\begin{aligned} x \sim_f y &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} f(x) = f(y) \\ &\iff f(x) \cdot f(y)^{-1} = 1_K \quad \left. \begin{array}{l} \cdot f(y)^{-1} \\ \int \cdot f(y) \end{array} \right\} \\ &\stackrel{f \text{ Gruppenhomom.}}{\iff} f(x \cdot y^{-1}) = 1_K \\ &\stackrel{\text{Def. Kern}}{\iff} x \cdot y^{-1} \in \ker f \\ &\stackrel{\text{Def. } \sim}{\iff} x \sim_{\ker f} y \end{aligned}$$

Also ist $\sim_f = \sim_{\ker f}$.

Ähnlich $\sim_f = \sim_{\ker f}$.

Also stimmen die entsprechenden Äquivalenzklassen überein. □

2.25 Isomorphiesatz für Gruppen

Jeder Gruppenhomomorphismus $f: (G, \cdot) \rightarrow (K, *)$ lässt sich faktorisieren wie folgt:

$$\begin{array}{ccc}
 (G, \cdot) & \xrightarrow{\quad f \quad} & (K, *) \\
 \downarrow \scriptstyle q & & \uparrow \scriptstyle i \\
 G / \ker f & \xrightarrow[\bar{f}]{\cong} & \text{im}(f) \\
 \downarrow \scriptstyle [x] & \mapsto & \downarrow \scriptstyle f(x)
 \end{array}$$

Es ist q die kanonische Projektion (Epimorphismus),
 $\bar{f}$ ein Isomorphismus,
 i eine kanonische Inklusion (Monomorphismus).

Beweis: Nach Satz 1.32 und Satz 2.22

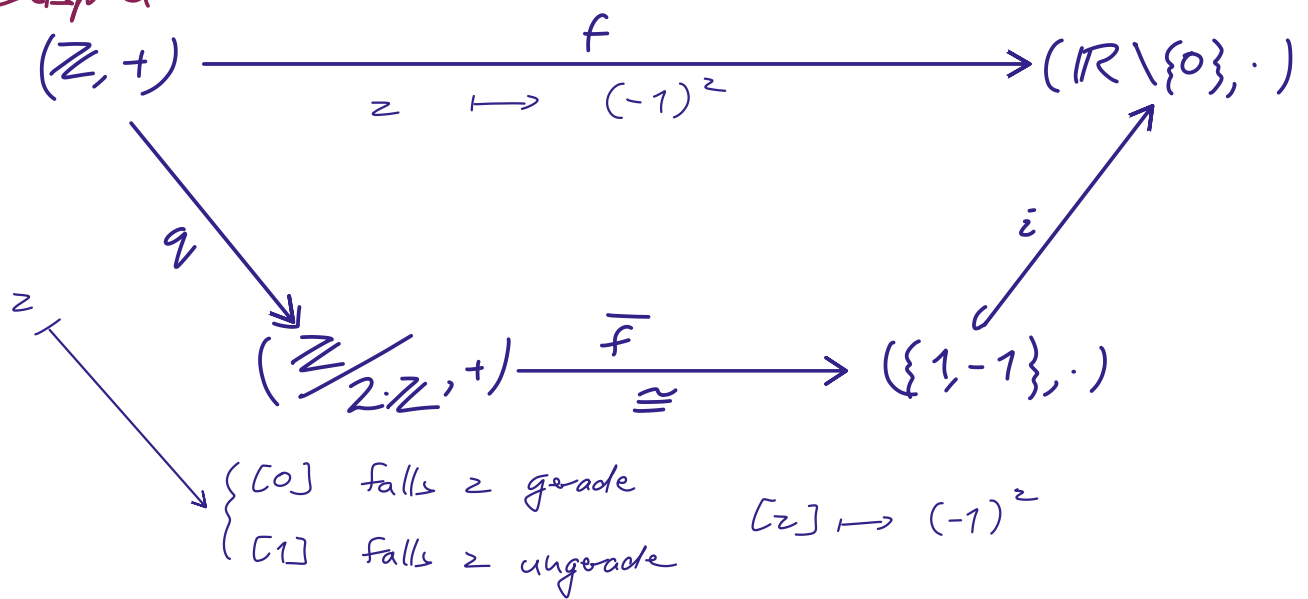
bleibt nur noch zu zeigen: $\bar{f}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Das können wir nachrechnen:
 für $[x], [y] \in G / \ker f$ ist

$$\begin{aligned}
 \bar{f}([x] \cdot [y]) &= \bar{f}([x \cdot y]) \\
 &\stackrel{\text{Gruppenstruktur auf } G/H}{=} f(x \cdot y) \\
 &\stackrel{\text{Def. von } f}{=} f(x) * f(y) \\
 &\stackrel{\text{Def. von } \bar{f}}{=} \bar{f}([x]) * \bar{f}([y])
 \end{aligned}$$

f Gruppenhomo.

□

Beispiel:



$$\ker f = 2\mathbb{Z}$$