

# Vektorräume

$K$  Körper

z.B.  $K = \mathbb{R}$

4.1 Def.: Ein Vektorraum über  $K$  /  $K$ -Vektorr.  
 $(V, +, \circ)$  ist eine abelsche Gruppe  $(V, +)$   
zusammen mit einer Abbildung

$$\circ: K \times V \longrightarrow V$$

sodass  $\forall r, s \in K$  und  $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$  gilt:

$$(V_1) \quad r \circ (\underline{u} + \underline{v}) = r \circ \underline{u} + r \circ \underline{v}$$

$$(V_2) \quad (r + s) \circ \underline{u} = r \circ \underline{u} + s \circ \underline{u}$$

$$(V_3) \quad (r \cdot s) \circ \underline{u} = r \circ (s \circ \underline{u})$$

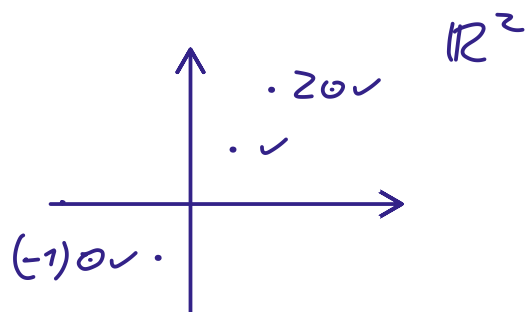
$$(V_4) \quad 1 \circ \underline{u} = \underline{u}$$

Elemente von  $V$ : Vektoren  $\underline{v}$  (oder  $\vec{v}$  oder  $v$ )

Nullelement von  $V$ : Nullvektor  $\underline{0}$

Elemente von  $K$ : Skalare  $s$

$\circ$  Skalarmultiplikation



Beispiele:

(a)  $\mathbb{R}^d = \overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^d$  mit Koordinatenveilen +  $\odot$ .  
Wir schreiben Vektoren  $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$   
gewöhnlich als Spalten  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ .

In dieser Notation ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_d + y_d \end{pmatrix}$$

$$s \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s \cdot x_1 \\ s \cdot x_2 \\ \vdots \\ s \cdot x_d \end{pmatrix} \quad \text{für } s \in \mathbb{R}.$$

Genauso:  $K^d$  ein  $K$ -VR für jeden Körper  $K$

(b) Der Polynomring  $K[x]$  ist ein  $K$ -VR  
bezüglich Polynomaddition und der  
Skalarmultiplikation  $K \times K[x] \longrightarrow K[x]$

$$(s, A) \mapsto s \cdot_p A$$

$s$  aufgefasst als  
konstantes Polynom

$$(\text{explizit: } s \odot (\sum_i a_i X^i) = \sum_i (s a_i) X^i)$$

(  $(V1, V2)$  folgen aus  $(R3)$

$(V3)$  folgt aus  $(R2a)$

$(V4)$  folgt, da  $1 \in K[x]$  neutral bzgl.  $\cdot_p$  )

(c)  $\mathbb{C}$  ist (nicht nur  $\mathbb{C}$ -VR sondern auch)  
 $\mathbb{R}$ -VR bezüglich

$+$ : gewöhnliche Add. in  $\mathbb{C}$

$$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{Produkt in } \mathbb{C}$$
$$(r, x+iy) \mapsto r \cdot (x+iy)$$

aufgefasst  
als  $r+i \cdot 0 \in \mathbb{C}$

$$(\quad) (= rx + i ry)$$

Analog:  $\mathbb{C}$  ist  $\mathbb{Q}$ -VR  
 $\mathbb{R}$  ist  $\mathbb{Q}$ -VR.

(d)  $I$  Menge

$$\text{Abb}(I, \mathbb{R}) := \{f: I \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

Def. für  $f, g \in \text{Abb}(I, \mathbb{R})$ ,  $s \in \mathbb{R}$ :

$$f + g := \left( \begin{array}{c} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ i \mapsto f(i) + g(i) \end{array} \right) \in \text{Abb}(I, \mathbb{R})$$

$$s \odot f := \left( \begin{array}{c} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ i \mapsto s \cdot f(i) \end{array} \right) \in \text{Abb}(I, \mathbb{R})$$

Mit diesen Def. ist  $(\text{Abb}(I, \mathbb{R}), +, \odot)$  ein  
 $\mathbb{R}$ -VR [...].

4.1 Def.: Ein Vektorraum über  $K$  /  $K$ -Vektorr.  
 $(V, +, \circ)$  ist eine abelsche Gruppe  $(V, +)$   
 zusammen mit einer Abbildung

$$\circ: K \times V \longrightarrow V$$

sodass  $\forall r, s \in K$  und  $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$  gilt:

$$(V_1) \quad r \circ (\underline{u} + \underline{v}) = r \circ \underline{u} + r \circ \underline{v}$$

$$(V_2) \quad (r + s) \circ \underline{u} = r \circ \underline{u} + s \circ \underline{u}$$

$$(V_3) \quad (r \cdot s) \circ \underline{u} = r \circ (s \circ \underline{u})$$

$$(V_4) \quad 1 \circ \underline{u} = \underline{u}$$

4.2 Notiz: Es gilt dann ferner:

$$(a) \quad s \circ \underline{u} = \underline{0} \iff (s = 0 \vee \underline{u} = \underline{0})$$

$$(b) \quad (-1) \circ \underline{u} = -\underline{u}$$

Beweis:

$$a: (\Leftarrow) \quad 0 \circ \underline{u} = (0 + 0) \circ \underline{u} \stackrel{V_2}{=} 0 \circ \underline{u} + 0 \circ \underline{u} \quad | - 0 \circ \underline{u} \\ \underline{0} = 0 \circ \underline{u}$$

$$s \circ \underline{0} = s \circ (\underline{0} + \underline{0}) \stackrel{V_1}{=} s \circ \underline{0} + s \circ \underline{0} \quad | - s \circ \underline{0} \\ \underline{0} = s \circ \underline{0}$$

$$(\Rightarrow) \quad \text{Sei } s \circ \underline{u} = \underline{0}.$$

Falls  $s = 0$ : FERTIG.

Falls  $s \neq 0$ , so ist  $s \in K^*$  (da  $K$  Körper),  
 und somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{u} &\stackrel{V_4}{=} 1 \circ \underline{u} = (\tilde{s}^{-1} \cdot s) \circ \underline{u} \\ &\stackrel{V_3}{=} \tilde{s}^{-1} \circ (s \circ \underline{u}) \\ &= \tilde{s}^{-1} \circ \underline{0} \\ &\stackrel{a}{=} \underline{0} \end{aligned}$$

□

4.4 Def.: Sei  $(V, +, \circ)$  ein  $K$ -VR. Ein  $K$ -Untervektorraum (UVR) von  $V$  ist eine Untergruppe  $U$  von  $(V, +)$  derart, dass sich  $\circ$  einschränken lässt zu einer Abb.  $\circ: K \times U \longrightarrow U$  sodass  $(U, +, \circ)$  selbst wieder ein  $K$ -VR ist.

4.5 Notiz:  $U \subseteq V$  ist genau dann ein UVR, wenn gilt:

$$(UVR1) \quad \underline{0} \in U$$

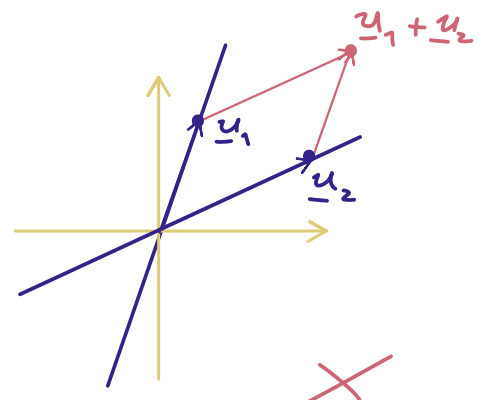
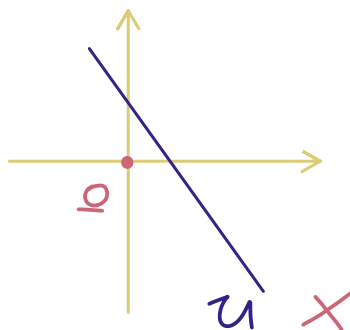
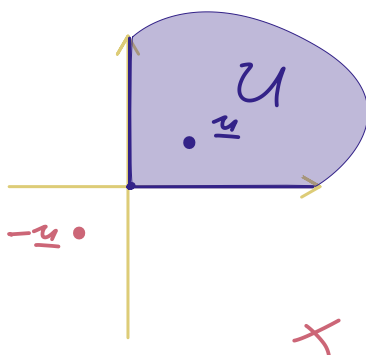
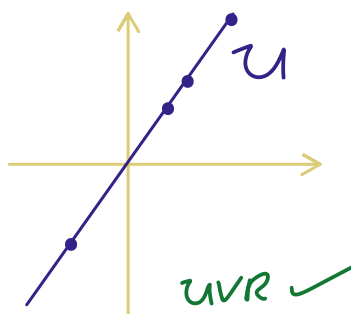
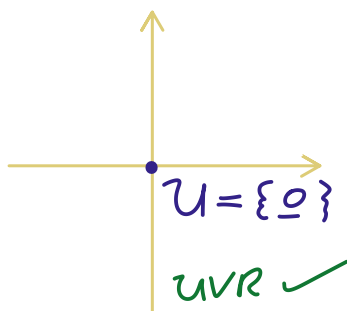
$$(UVR2) \quad \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \Rightarrow \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$$

$$(UVR3) \quad \underline{u} \in U, s \in K \Rightarrow s \circ \underline{u} \in U.$$

(Die Bedingung  $\underline{u} \in U \Rightarrow -\underline{u} \in U$  folgt bereits aus (UVR3) mit  $s := -1$ .)

Beispiele:

$$(a) \quad V = \mathbb{R}^2$$



(b)  $K[X]_{\leq n} := \{ A \in K[X] \mid \deg A \leq n \}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ )  
ist  $K$ -ZVR von  $K[X]$

$K[X]_{> n} := \{ A \in K[X] \mid \deg A > n \}$   
ist **kein**  $K$ -ZVR ( $\neq 0$ )

(c)  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall, z. B.  $I = [0, 1]$  oder  $I = \mathbb{R}$

$C^0(I) := \{ f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

$= \text{Abb}(I, \mathbb{R})$

ist ein  $\mathbb{R}$ -ZVR von  $\text{Abb}(I, \mathbb{R})$ .

ab jetzt " $\cdot$ " oder " $\circ$ " für  $\odot$

## Konstruktionen mit UVR

$(V, +, \cdot)$  K-VR

4.6 Satz: Der Schnitt beliebiger K-UVR ist wieder ein K-UVR.

$$\left( \mathcal{U}_i \subseteq V \text{ UVR} \Rightarrow \bigcap_i \mathcal{U}_i \subseteq V \text{ UVR} \right)$$

Beweis:

Seien  $\mathcal{U}_i \subseteq V$  ( $i \in I$ ) UVR von  $V$ .

(UVR1) Da  $\underline{0} \in \mathcal{U}_i$  für jedes  $i \in I$ , folgt  
 $\underline{0} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$ .

(UVR2) Seien  $u_1, u_2 \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$ .

Dann gilt für alle  $i \in I$ :  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_i$ .

Da jedes  $\mathcal{U}_i$  ein UVR ist, folgt  
für alle  $i \in I$ :  $u_1 + u_2 \in \mathcal{U}_i$ .

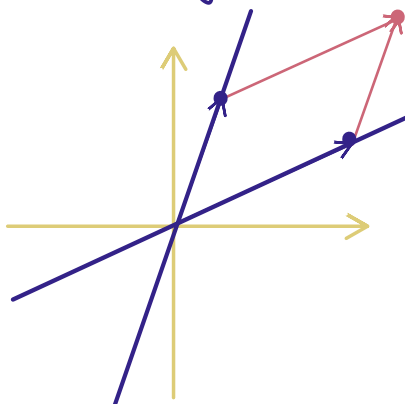
Also ist  $u_1 + u_2 \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$

(UVR3) analog

□



Verenignungen von UVR sind i.A.  
keine UVR, vgl. Bsp. 4.5 (a).



stattdessen: Summe (s.u.)

4.7 Def.:  $(V, +, \cdot)$   $K$ -VR,  $M \subseteq V$  Teilmenge  
 Eine  $K$ -Linearkombination von Vektoren aus  $M$   
 ist eine endliche Summe der Form

$$\sum_{i=1}^n s_i \cdot v_i = s_1 \cdot v_1 + \dots + s_n \cdot v_n$$

mit  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $v_i \in M$  für jedes  $i$ ,  
 $s_i \in K$  für jedes  $i$ .

$$\left( \sum_{i=1}^0 := \underline{0} \right)$$

4.8 Def.:  $M, V$  wie in 4.7.

Die  $K$ -lineare Hülle  $\langle M \rangle$  ist die Menge  
 aller  $K$ -Linearkombinationen von Vektoren  
 aus  $M$ .

4.9 Satz:  $M, V$  wie in 4.7.

$\langle M \rangle$  ist der kleinste  $K$ -UVR von  $V$ ,  
 (d.h.: jeder UVR, der  $M$  enthält, der  $M$  enthält,  
 enthält schon  $\langle M \rangle$ )

Beweis:

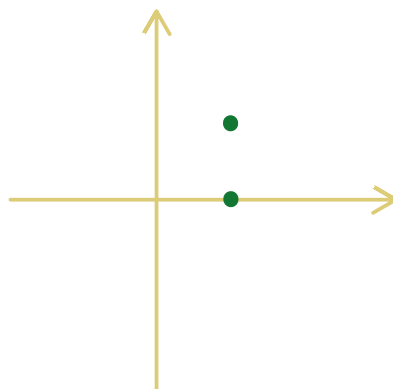
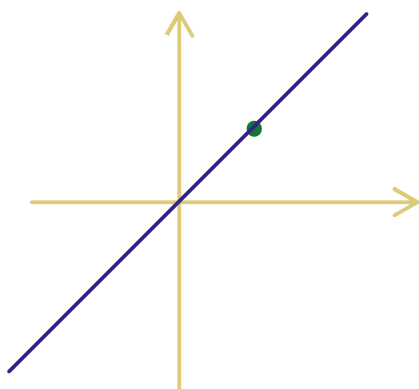
- $\langle M \rangle$  ist UVR, denn  $\langle M \rangle$  erfüllt (UVR1, 2, 3)  
 aus Notiz 4.5. [...]
- $M \subseteq \langle M \rangle$  (Schreibe  $v \in M$  als  $1 \cdot v$ )
- Sei  $U \subseteq V$  ein UVR mit  $M \subseteq U$ .  
 Wegen (UVR3) ist  $s \cdot v \in U$  für alle  $v \in M$ .  
 Wegen (UVR2) ist  $s_1 \cdot v_1 + \dots + s_n \cdot v_n \in U$   
 für alle  $v_i \in M$ . Also ist  $\langle M \rangle \subseteq U$ . □

Beispiele:

(a)  $\langle \emptyset \rangle = \{ \underline{0} \}$

(b)  $V = \mathbb{R}^2$

$((V, +, \cdot)$  beliebig)



$$\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle = \mathbb{R}^2$$

(c)  $V = K[x]$

$$\langle \{ 1, x, x^2 \} \rangle = K[x]_{\leq 2}$$

$$\langle \{ x^i \mid i \in \mathbb{N}_0 \} \rangle = K[x]$$

4.10 Def.:  $(V, +, \cdot)$  K-VR

Die interne Summe von zwei UVR  $U_1, U_2 \subseteq V$  ist der UVR

$$U_1 + U_2 := \langle U_1 \cup U_2 \rangle$$

Allgemeiner:  $\sum_{i \in I} U_i := \langle \bigcup_{i \in I} U_i \rangle$

4.11 Notiz:  $U_1 + U_2 = \{ \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \mid \underline{u}_i \in U_i \}$

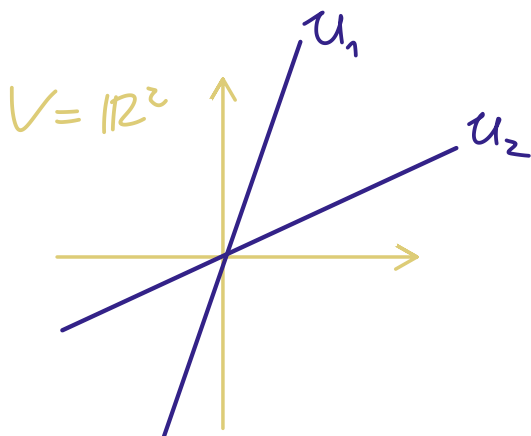
(( $\supseteq$ )) ✓

(( $\subseteq$ )) Jeder Vektor aus  $U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$  lässt sich schreiben als

$$\underbrace{s_1 \underline{v}_1 + \dots + s_k \underline{v}_k}_{\in U_1} + \underbrace{s'_1 \underline{v}'_1 + \dots + s'_{k'} \underline{v}'_{k'}}_{\in U_2}$$

mit  $\underline{v}_i \in U_1$ ,  
 $\underline{v}'_{i'} \in U_2$  )

Beispiel:



$$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$$

$$U_1 + U_1 = U_1$$