

Basen

K Körper

$V = (V, +, \cdot)$ K -VR

5.1 Def.: Ein Tupel $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ von Vektoren $\underline{v}_i \in V$ ist ...

(a) ... Erzeugendensystem von V , falls

$$\langle \{ \underline{v}_i \mid i \in I \} \rangle = V.$$

(b) ... linear unabhängig, wenn sich die Vektoren $\underline{v}_i$ nur auf triviale Weise zum Nullvektor linear kombinieren lassen, wenn also für Skalare $s_i \in K$ gilt:

$$\sum_{i \in I} s_i \underline{v}_i = \underline{0} \implies (\forall i \in I: s_i = 0)$$

endlich (d.h.: $s_i = 0$ für alle außer endlich viele i)

(c) Eine **Basis** von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V .

Beispiele:

(a) $V = K^d$. Sei $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\underline{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d)$ ist ein Erzeugendensystem von K^d .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \underline{e}_1 + \dots + x_d \cdot \underline{e}_d$$

$$\in \langle \{ \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d \} \rangle$$

$(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d)$ ist linear unabhängig:

Seien $s_1, \dots, s_d \in K$, und sei

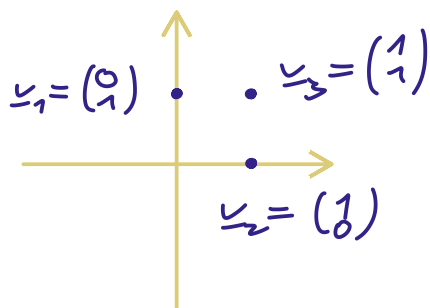
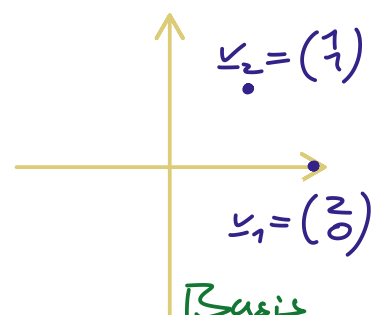
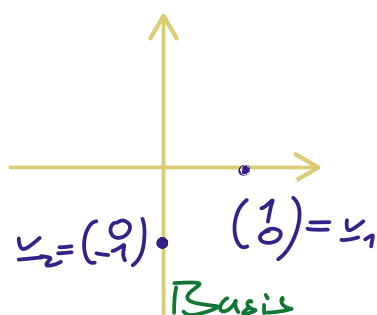
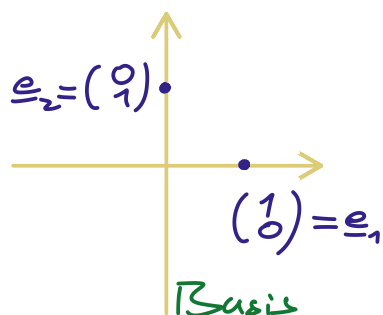
$$\sum_{i=1}^d s_i \cdot \underline{e}_i = \underline{0}.$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

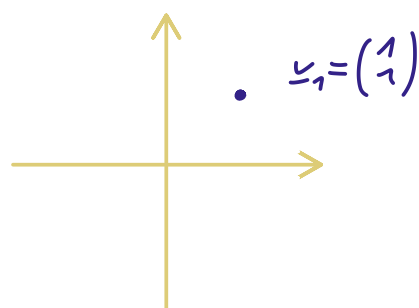
Dann ist $s_1 = s_2 = \dots = s_d = 0$.

Also ist $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d)$ eine Basis, die Standardbasis von K^d .

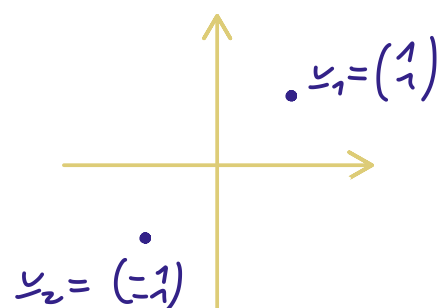
(b) $V = \mathbb{R}^2$



E-System
(linear abhängig:
 $\underline{v}_3 - \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}$)



kein E-System
(linear unabhängig)



kein E-System
(linear abhängig:
 $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{0}$)

(c) $(\underline{0})$ ist immer linear abhängig ($1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$)

$(\underline{v})$ mit $\underline{v} \neq \underline{0}$ ist immer linear unabhängig

$$(s \cdot \underline{v} = \underline{0} \stackrel{4.2}{\Leftrightarrow} (s = 0 \vee \underline{v} = \underline{0}))$$

(d) $V = \mathbb{R}[x]$ ($\mathbb{R}$ -VR)

$(1, x, x^2, x^3, \dots) = (x^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist...

... ein Erzeugendensystem, denn jedes Polynom

hat die Form $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} s_i x^i$
endlich

für gewisse $s_i \in \mathbb{R}$.

... linear unabhängig, denn ein Polynom ist genau dann Null, wenn alle Koeffizienten Null sind.

Also ist $(x^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]$.

Warnung 5.2.:

Ob $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem ist, hängt nur von der Menge $\{\underline{v}_i \mid i \in I\}$ ab.

Ob $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist, hängt ab vom Tupel.

z.B. für $\underline{v} \neq \underline{0}$: $(\underline{v})$ linear unabh.

$(\underline{v}, \underline{v})$ linear abhängig.

