

6. Matrizen I

Gesehen: jeder endlich-dim VR $V \cong K^n$

Jetzt: beschreibe alle K -linearen Abbs.
 $K^n \longrightarrow K^m$

6.1 Def.: Eine $n \times m$ -Matrix über K ist ein $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ -Tupel von Elementen aus K .

Notation: $\begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & \dots & s_{mn} \end{pmatrix} = (s_{ij})_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{1, \dots, n\}}}$

Zeile zuerst $\nearrow$ Spalte später mit $s_{ij} \in K$.

6.2 Def.: Das Produkt einer $m \times n$ -Matrix $S = (s_{ij})_{ij}$ mit einem Vektor $\underline{x} = (x_j)_j \in K^n$ ist der Vektor

$$S \cdot \underline{x} := \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} \cdot x_j \right)_i \in K^m$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + s_{13}x_3 \\ s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{23}x_3 \end{pmatrix} \in K^2$$

6.3

Notation: Für eine $m \times n$ -Matrix S schreiben wir f_S für die Abb.

$$f_S: K^n \longrightarrow K^m$$

$$\underline{x} \longmapsto S \cdot \underline{x}$$

Satz: Diese Abb. ist K -linear.

Beweis: Seien $\underline{x} = (x_i)_i$ und $\underline{y} = (y_i)_i \in K^n$,
 $r \in K$.

Def. von $+$ in K^n

$$f_S(\underline{x} + \underline{y}) = f_S((x_i + y_i)_i)$$

$$= (\sum_j s_{ij} \cdot (x_j + y_j))_i$$

Def. von f_S

$$= (\sum_j s_{ij} x_j + \sum_j s_{ij} y_j)_i$$

Distribut.
in K

$$= (\sum_j s_{ij} x_j)_i + (\sum_j s_{ij} y_j)_i$$

$$= f_S(\underline{x}) + f_S(\underline{y})$$

Def. von f_S

$$f(r \cdot \underline{x}) = \overset{\text{analog}}{=} r \cdot f(\underline{x})$$

□

6.4 Hauptsatz, Teil II:

Jede K -lineare Abb. $f: K^n \longrightarrow K^m$ ist von der Form $f = f_S$ für eine eindeutig bestimmte $m \times n$ -Matrix S mit Koeff. in K .

Beweis: Sei $f: K^n \longrightarrow K^m$ linear.

Betrachte Standardbasis

$$\begin{array}{ll} \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{von } K^n, \\ \tilde{\underline{e}}_1, \dots, \tilde{\underline{e}}_m & \text{von } K^m. \end{array}$$

Es ist (*) $f(\underline{e}_j) = \sum_{i=1}^m s_{ij} \cdot \tilde{\underline{e}}_i$ für gewisse (eindeutige) $s_{ij} \in K$.

Für einen beliebigen Vektor $\underline{x} = (x_j)_{j=1, \dots, n} \in K^n$

$$\text{gilt dann: } f(\underline{x}) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot \underline{e}_j\right)$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{f \text{ linear}}{=} \sum_{j=1}^n x_j \cdot f(\underline{e}_j) \\ & \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^n x_j \cdot \sum_{i=1}^m s_{ij} \cdot \tilde{\underline{e}}_i \\ & = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} \cdot x_j \right) \tilde{\underline{e}}_i \\ & = \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} \cdot x_j \right)_{i=1, \dots, m} \end{aligned}$$

Def. von f_S
bzw. von $S \cdot \underline{x}$

$$\stackrel{\text{green arrow}}{=} f_S(\underline{x}) \quad \text{für } S = (s_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

□

Der Beweis zeigt (siehe (*)):

Die j -te Spalte $(s_{ij})_i$ von S ist das Bild $f(\underline{e}_j)$ des j -ten Standardbasisvektors.

6.5 Satz & Def.:

Für K -VR V, W ist der **Abbildungsraum**

$$\text{Hom}_K(V, W) := \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ K-linear}\}$$

wiederum ein K -VR bezüglich folgender Add. und Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned}(f + g)(v) &:= f(v) + g(v) \\ (s \cdot f)(v) &:= s \cdot f(v)\end{aligned}$$

für $f, g \in \text{Hom}_K(V, W)$ und $s \in K$.

Beweis:

SCHRITT 1: Die Menge aller Abb.

$$\text{Abb}(V, W) := \{f: V \rightarrow W\}$$

ist mit obigen Verknüpfungen ein K -VR
- vgl. Beispiel 1.4(d) zu $\text{Abb}(I, \mathbb{R})$.

1-dim $\mathbb{R}$ -VR.

Alle VR-Axiome für $\text{Abb}(V, W)$ lassen sich zurückführen auf VR-Axiome für W , z.B.:

$$(V1) \quad s \cdot (f + g) = s \cdot f + s \cdot g$$

für alle $f, g \in \text{Abb}(V, W)$, $s \in K$, denn:
für jedes $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}(s \cdot (f + g))(v) &= s \cdot ((f + g)(v)) \\ &= s \cdot (f(v) + g(v)) \\ &= s \cdot f(v) + s \cdot g(v) \\ &= (s \cdot f)(v) + (s \cdot g)(v) \\ &= (s \cdot f + s \cdot g)(v)\end{aligned}$$

SCHRITT 2: $\text{Hom}_K(V, W) \subseteq \text{Abb}(V, W)$ ist ein K -UVR:

(UVR1) Nullabb. ($v \mapsto 0$) ist linear.

(UVR2) f, g linear $\Rightarrow$ $\underbrace{f + g}_{\text{NEU}}$ linear

(UVR3) $s \in K, f$ linear $\Rightarrow$ $\underbrace{s \cdot f}_{\text{NEU}}$ linear

z.B. zu UVR2: Seien $v, v_1, v_2 \in V, s \in K$.

zz:

$$(i) \underbrace{(f + g)}_{\text{NEU}}(\underbrace{v_1 + v_2}_V) = \underbrace{(f + g)}_{\text{NEU}}(v_1) + \underbrace{(f + g)}_{\text{NEU}}(v_2)$$

$$(ii) \underbrace{(f + g)}_{\text{NEU}}(\underbrace{s \cdot v}_V) = \underbrace{s \cdot ((f + g)(v))}_W$$

z.B. zu i:

Def. $\downarrow$ $\underbrace{+}_{\text{NEU}}$

$$\begin{aligned} \underbrace{(f + g)}_{\text{NEU}}(\underbrace{v_1 + v_2}_V) &= \underbrace{f(v_1 + v_2)}_{\text{NEU}} + \underbrace{g(v_1 + v_2)}_W \\ &\stackrel{f, g \text{ linear}}{=} \underbrace{f(v_1)}_W + \underbrace{f(v_2)}_W + \underbrace{g(v_1)}_W + \underbrace{g(v_2)}_W \\ &= \underbrace{f(v_1)}_W + \underbrace{g(v_1)}_W + \underbrace{f(v_2)}_W + \underbrace{g(v_2)}_W \\ &= \underbrace{(f + g)(v_1)}_{\text{NEU}} + \underbrace{(f + g)(v_2)}_{\text{NEU}} \end{aligned}$$

etc. etc.

□

6.6 Satz & Def.:

$$\text{Mat}_K(n \times n) := \{n \times n\text{-Matrizen über } K\}$$

ist ein K -VR bezüglich der folgendermaßen def. Addition & Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} (s_{ij})_{ij} +_{\text{NEU}} (t_{ij})_{ij} &:= (s_{ij} + t_{ij})_{ij} \quad \text{in } K \\ r \cdot_{\text{NEU}} (s_{ij})_{ij} &:= (r \cdot s_{ij})_{ij} \quad \text{in } K \end{aligned}$$

Ferner ist $\text{Mat}_K(n \times m) \underset{(*)}{\cong} K^{n \cdot m}$.

Beweis:

Mit obigen Def. ist der einzige Unterschied zwischen dem K -VR $K^{n \cdot m}$ und $\text{Mat}_K(n \times m)$ die Anordnung der Einträge. Eine Basis von $\text{Mat}_K(n \times m)$ ist z.B. gegeben durch

$$(E_{11}, E_{12}, E_{13}, \dots, E_{1n}, \\ E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \\ \dots \\ E_{m1}, E_{m2}, \dots, E_{mn}).$$

mit $E_{ij} :=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \end{matrix}$$

□

6.7 Korollar (aus Hauptsatz 6.4):

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_K(m \times n) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_K(K^n, K^m) \\ S & \mapsto & f_S \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von K -VR.

Beweis:

Laut 6.4 ist die Abb. bijektiv. Zu prüfen ist

noch Linearität, also (i) $f_{S+T} \stackrel{6.6}{=} f_S \stackrel{6.5}{+} f_T$

(ii) $f_{r \cdot S} \stackrel{6.6}{=} r \cdot f_S \stackrel{6.5}{=} f_S$ (für $r \in K$)

Sei dazu $S = (s_{ij})_{ij}$, $T = (t_{ij})_{ij}$.

zu i: Für $\underline{x} = (x_j)_{j=1, \dots, n} \in K^n$ gilt:

$$\begin{aligned} f_{S+T}(\underline{x}) &= f_{(s_{ij}+t_{ij})_{ij}}(x_j)_j \\ &= \left(\sum_{j=1}^n (s_{ij} + t_{ij}) \cdot x_j \right)_i \\ &= \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} \cdot x_j + \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot x_j \right)_i \\ &\stackrel{\substack{\text{Def von} \\ + \text{ in } K^n}}{\cong} \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} \cdot x_j \right)_i + \left(\sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot x_j \right)_i \\ &= f_S(\underline{x}) + f_T(\underline{x}) \end{aligned}$$

ii analog. □

Korollar 6.7 bedeutet:

$$\begin{array}{ccc} \text{Add. von} & \cong & \text{Add. linearen} \\ \text{Matrizen} & & \text{Abds.} \\ \text{Skalierung von} & \cong & \text{Skalierung linearen} \\ \text{Matrizen} & & \text{Abds.} \end{array}$$

Frage:

$$\begin{array}{ccc} ? & \cong & \text{Komposition} \\ \circ & & \\ \rightarrow 6.9 & & \end{array}$$

6.8 Def.: Die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n \in \text{Mat}_K(n \times n)$

ist die Matrix

$$\mathbb{1}_n := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

(1en auf Diagonale, sonst 0).

Das Produkt zweier Matrizen

$$S = (s_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_K(l \times m)$$

$$T = (t_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_K(m \times n)$$

ist gegeben durch

$$S \cdot T := \left(\sum_{j=1}^m s_{ij} \cdot t_{jk} \right)_{ik} \in \text{Mat}_K(l \times n)$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Dimensions: $l=2, m=4, n=3$

6.9 Satz: (a) $f_{1_n} = \text{id}_{K^n}$
 (b) $f_{S \cdot T} = f_S \circ f_T$

Beweis:

a: $f_{1_n}((x_i)_{i=1, \dots, n}) = \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} \cdot x_j \right)_i = (x_i)_i$

wobei $s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b: $f_{S \cdot T}((x_k)_k) = \left(\sum_k \underbrace{[S \cdot T]_{ik}}_{\text{Eintrag von } S \cdot T \text{ in Zeile } i \text{ \& Spalte } k} x_k \right)_i$

$= \left(\sum_k \left(\sum_j s_{ij} \cdot t_{jk} \right) \cdot x_k \right)_i$

$= \left(\sum_j s_{ij} \cdot \left(\sum_k t_{jk} \cdot x_k \right) \right)_i$

$= f_S \left(\left(\sum_k t_{jk} \cdot x_k \right)_j \right)$

$= f_S \left(f_T((x_k)_k) \right)$

$= (f_S \circ f_T)((x_k)_k)$

□

6.10 Korollar

(a) Matrizenmultiplikation ist assoziativ.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind

$$(\text{Hom}_K(K^n, K^n), \underset{6.5}{+}, \underset{1.18}{\circ})$$

$$\text{und } (\text{Mat}_K(n \times n), \underset{6.6}{+}, \underset{6.9}{\cdot})$$

isomorphe Ringe mit Einselementen

$$\text{id}_{K^n} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{1}_n$$

Beweis:

a: folgt aus Assoziativität von $\circ$ (Satz 1.19) und Satz 6.9.

b: Satz 6.4 Bijektion, die nach 6.7 & 6.9 mit $+$ und $\circ$ bzw. $\cdot$ verträglich ist.

Reicht also, Ringaxiome für

$$(\text{Hom}_K(K^n, K^n), +, \circ)$$

zu prüfen. Zum Beispiel (R3):

Für $f, g, h \in \text{Hom}_K(K^n, K^n)$ gilt:

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h,$$

denn $\forall x \in K^n$ gilt:

$$\begin{aligned} ((f + g) \circ h)(x) &= (f + g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) + g(h(x)) \\ &\quad \begin{array}{l} \text{Def } + \text{ in 6.5} \end{array} \\ &= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) \\ &\quad \begin{array}{l} \text{in } K^n \end{array} \\ &= (f \circ h + g \circ h)(x) \end{aligned}$$

usw.





Matrizenmultiplikation ist i.A. **nicht** kommutativ, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\#}$$

6.11 Def.: Eine quadratische Matrix $S \in \text{Mat}_K(n, n)$ ist **invertierbar**, wenn sie eine Einheit in $(\text{Mat}_K(n, n), +, \cdot)$ ist, also ein multiplikatives Inverses S^{-1} besitzt.

6.12 Korollar:

S ist invertierbar $\Leftrightarrow f_S$ ist ein Isomorphismus.
Dann ist $f_{S^{-1}} = (f_S)^{-1}$.

(Das folgt unmittelbar aus 6.10 (b).)

6.13 Def.: Der **Rang** einer Matrix ist der Rang der durch sie definierten linearen Abb.:

$$\text{rk}(S) := \text{rk}(f_S) \\ (= \dim(\text{im } f_S)).$$