

# Lineare Gleichungssysteme

6.14 Def.: Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist eine Gleichung der Form

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

für eine Matrix  $A \in \text{Mat}_K(m \times n)$ ,  $\underline{x} \in K^n$ ,  $\underline{b} \in K^m$ .

Explizit:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Dabei sind  $A = (a_{ij})_{ij}$  und  $\underline{b} = (b_i)_i$

vorgegeben und gesucht werden alle möglichen Werte für  $\underline{x}$ :

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) := \{ \underline{x} \in K^n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{b} \} \quad \text{Lösungsraum}$$

$$\mathcal{L}(A) := \mathcal{L}(A, \underline{0})$$

Ein LGS mit  $\underline{b} = \underline{0}$  heißt homogen.

6.15 Satz.: Für jedes  $A \in \text{Mat}_K(m \times n)$  ist  
 $\mathcal{L}(A) \subseteq K^n$   
 ein UVR der Dimension  
 $n - \text{rk}(A)$ .

Beweis:

$$\mathcal{L}(A) = \{x \in K^n \mid \underbrace{A \cdot x}_{f_A(x)} = \underline{0}\} = \text{Ker}(f_A)$$

ist ein UVR nach Satz 4.16.

Nach der Rangformel 5.17 gilt ferner:

$$\underbrace{\text{rk}(f_A)}_{\text{rk}(A)} = n - \dim(\text{Ker } f_A).$$

□

6.16 Korollar: Jedes homogene LGS mit  
 mehr Unbekannten als Zeilen ( $n > m$ )  
 besitzt mindestens eine Lösung  $x \neq \underline{0}$ .

Beweis:  $\text{im}(f_A) \subseteq K^m$ , also ist

$$\text{rk}(A) = \dim(\text{im}(f_A)) \leq m$$

Also folgt aus 6.15:

$$\dim \mathcal{L}(A) = n - \text{rk}(A) \geq n - m > 0 \quad \square$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

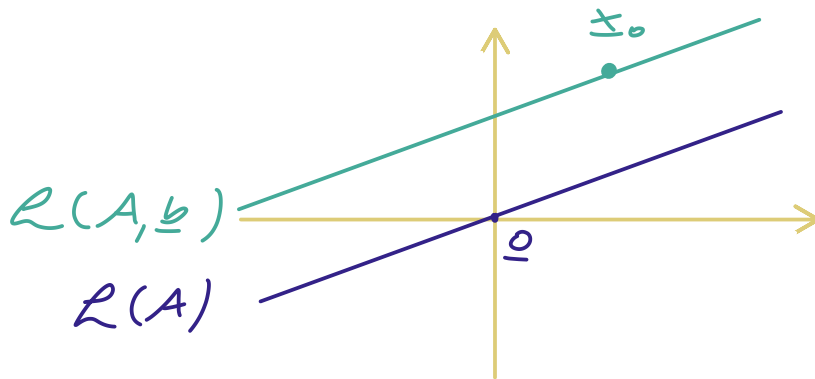
$$n=3 > 2=m$$

Eine Lösung  $\neq \underline{0}$  ist z.B.  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

6.17 Satz: Betrachte LGS  $A \cdot x = \underline{b}$ .  
Existiert eine Lösung  $\pm_0 \in \mathcal{L}(A, \underline{b})$ , so ist

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \pm_0 + \mathcal{L}(A)$$

(Nebenklasse von  $\mathcal{L}(A)$  in  $K^n$ )



Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, \underline{b}) &= f_A^{-1}(\underline{b}) = f_A^{-1}(f_A(\pm_0)) \\ &\stackrel{\text{Satz 2.23}}{=} \pm_0 + \ker(f_A) \\ &= \pm_0 + \mathcal{L}(A) \end{aligned}$$

□

Beispiele über  $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{array}{l} 2x_1 = 0 \\ 1 \cdot x_2 = 0 \end{array}$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{array}{l} 2x_1 = 6 \\ 1 \cdot x_2 = 1 \end{array}$$

//

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{array}{l} 2x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \emptyset \quad \begin{array}{l} 2x_1 = 0 \\ 0 = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \begin{array}{l} 2x_1 = 6 \\ 0 = 0 \end{array} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

6.18 Def: Eine elementare Zeilentransformation erzeugt aus  $A \in \text{Mat}_K(m \times n)$  eine neue Matrix  $A' \in \text{Mat}_K(m \times n)$  durch ...

(VERTAUSCHEN) Vertauschen zweier Zeilen  
oder

(SKALIEREN) Skalarmultiplikation einer Zeile  
mit einem  $s \in K^\times$  !  $s \neq 0$ !  
oder

(ADDITION) Addition des  $s$ -fachen einer  
Zeile ( $s \in K$ ) zu einer anderen  
Zeile.

Eine Zeilentransformation ist eine Verkettung endlich vielen elementaren Zeilentransformationen.

Analog: (elementare) Spaltentransformationen

## 6.19 Def.: Elementarmatrizen

$$E_{k \leftrightarrow l} := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} k \\ l \end{matrix}$$

Einträge:

$$e_{kl} = e_{lk} = 1$$

$$e_{ii} = 1 \quad \forall i \neq k, l$$

sonst 0

$$E_{s \cdot k} := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & s & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} k \end{matrix}$$

$(s \in K^*)$

$$e_{kk} = s \in K^*$$

$$e_{ii} = 1 \quad \forall i \neq k$$

sonst 0

$$E_{k \frac{s}{l}} := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & s & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l \end{matrix}$$

$(s \in K, k \neq l)$

$$e_{lk} = s \in K$$

$$e_{ii} = 1 \quad \forall i$$

sonst 0

6.20 Satz: Die elementaren **Zeilentrafos** entsprechen **Links**multiplikation mit den Elementarmatrizen:

$E_{k \leftrightarrow l}$ :  $A$  geht aus  $A$  durch Vertauschen der Zeilen  $k$  &  $l$  hervor.

$E_{s,k}$ :  $A$  geht aus  $A$  durch Skalieren von Zeile  $k$  mit dem Faktor  $s$  hervor.

$E_{\begin{smallmatrix} ks \\ l \end{smallmatrix}}$ :  $A$  geht aus  $A$  durch Addieren des  $s$ -fachen von Zeile  $k$  auf Zeile  $l$  hervor.

Die elementaren **Spaltentrafos** entsprechen **Rechts**multiplikation mit den Elementarmatrizen.

$E_{k \leftrightarrow l}$ :  $A$  geht aus  $A$  durch Vertauschen der Spalten  $k$  &  $l$  hervor.

$E_{s,k}$ :  $A$  geht aus  $A$  durch Skalieren von Spalte  $k$  mit dem Faktor  $s$  hervor.

$E_{\begin{smallmatrix} k \\ ls \end{smallmatrix}}$ :  $A$  geht aus  $A$  durch Addieren des  $s$ -fachen von Spalte  $l$  auf Spalte  $k$  hervor.

**Beweis:** Für beliebige  $A = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_K(l \times m)$ ,  
 $B = (b_{jk})_{jk} \in \text{Mat}_K(m \times n)$

ist nach Def.  $(A \cdot B)_{i,k} = \sum_j a_{ij} \cdot b_{jk}$ ,

also  $(\text{Zeile } i \text{ von } A \cdot B)_k = \sum_j a_{ij} \cdot (\text{Zeile } j \text{ von } B)_k$

also schlicht:

$$(\text{Zeile } i \text{ von } A \cdot B) = \sum_j a_{ij} \cdot (\text{Zeile } j \text{ von } B)$$

Analog gilt:

$$(\text{Spalte } k \text{ von } A \cdot B) = \sum_j (\text{Spalte } j \text{ von } A) \cdot b_{jk}$$

Rechne nun durch, z.B.:

$$(\text{Zeile } l \text{ von } E_{k \begin{smallmatrix} s \\ l \end{smallmatrix}} \cdot A) = \sum_j e_{lj} \cdot (\text{Zeile } j \text{ von } A)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{j=k} s \cdot (\text{Zeile } k \text{ von } A) \\ \xrightarrow{j=l} + 1 \cdot (\text{Zeile } l \text{ von } A) \end{array}$$

usw. usf.

□

**Korollar 6.21:** Die Elementarmatrizen sind invertierbar:

$$(E_{k \leftrightarrow l})^{-1} = E_{k \leftrightarrow l}$$

$$(E_{s,k})^{-1} = E_{s^{-1},k}$$

$$(E_{k \begin{smallmatrix} s \\ l \end{smallmatrix}})^{-1} = E_{k \begin{smallmatrix} -s \\ l \end{smallmatrix}}$$

**Beweis:**

$$E_{k \leftrightarrow l} \cdot E_{k \leftrightarrow l} = E_{k \leftrightarrow l} (E_{k \leftrightarrow l} \cdot 1_n) \stackrel{6.20}{=} 1_n$$

usw.

□

Korollar 6.22: Zeilen- und Spaltenoperationen  
ändern nicht den Rang  
einer Matrix.

Beweis: 2026



